

Jean-Pierre Dedieu

**METHODES D'ANALYSE
GLOBALE
EN ALGEBRE LINEAIRE ET EN
OPTIMISATION**

MIP, Département de Mathématiques
Université Paul Sabatier
31062 Toulouse cedex 04
dedieu@mip.ups-tlse.fr

List of Tables

3.1	Sous-variété différentiable.	17
4.1	L'application ϕ_{ji}	29
7.1	Drapeaux et grassmannienne.	70
8.1	Endomorphismes hyperboliques du plan	82
8.2	Les variétés stables et instables	84
8.3	Une carte locale pour la sphère	87
11.1	Gradients de ϕ et ψ	118
11.2	Les champs n_Φ et n_Ψ	120

Table des Matières

1	Introduction	9
2	Calcul différentiel	13
2.1	Calcul différentiel sur les espaces de Banach.	13
2.1.1	Dérivée d'une application.	13
2.1.2	Dérivée seconde.	14
2.1.3	Dérivée d'ordre p .	14
2.1.4	Norme de la dérivée p -ième d'une application vectorielle.	15
2.2	Calcul différentiel sur les espaces de Hilbert.	15
2.3	Fonctions analytiques.	15
2.4	Difféomorphismes	16
3	Sous-variétés différentiables	17
3.1	Sous-variétés, équations locales, espaces tangent	17
3.2	Le groupe orthogonal	23
3.3	La variété de Stiefel	24
3.4	Applications de rang donné	25
3.5	La variété d'incidence	27
4	Variétés différentiables	29
4.1	Variétés	29
4.2	Sous-variétés, produits de variétés.	30
4.3	Variétés quotients	30
4.3.1	Espaces topologiques quotients	30
4.3.2	Exemples : L'espace projectif réel.	31
4.3.3	Exemples : L'espace projectif complexe.	32
4.3.4	Exemples : La grassmannienne.	32
4.3.5	Exemples : La variété des drapeaux.	34
4.4	Motivations	35
5	Espaces tangents	37
5.1	Vecteurs tangents	37
5.2	Le fibré tangent	38
5.3	Dérivée d'une application	39

6	Itérations successives	41
6.1	Points fixes attractifs, répulsifs, hyperboliques	41
6.1.1	Les sous-espaces contractés et dilatés	42
6.1.2	Exemple : les endomorphismes diagonalisables	43
6.1.3	Exemple : les endomorphismes du plan.	44
6.2	Endomorphismes contractants, dilatants ou hyperboliques	45
6.2.1	Spectre d'un opérateur	45
6.2.2	Rayon spectral	46
6.2.3	Spectre d'un endomorphisme réel	47
6.2.4	Endomorphismes contractants.	48
6.2.5	Endomorphismes dilatants	48
6.2.6	Endomorphismes hyperboliques	49
6.3	Le cas non linéaire : le théorème de Grobman-Hartman.	52
6.4	Points fixes hyperboliques sur les variétés	53
6.5	Exemple : valeurs propres et méthode de la puissance.	53
6.6	Exemple : la méthode QR	58
6.6.1	Les décompositions QR et de Choleski.	58
6.6.2	La décomposition de Schur.	60
6.6.3	La variété des drapeaux.	60
6.6.4	L'action de A sur la variété des drapeaux.	61
6.6.5	L'algorithme QR de Francis.	65
7	Sous-espaces invariants	67
7.1	Qu'est-ce qu'un sous-espace invariant ?	67
7.2	L'action de A sur la grassmannienne	69
8	Champs de vecteurs et équations différentielles	73
8.1	Champs de vecteurs, trajectoires	73
8.2	Trajectoires maximales, flot intégral	74
8.3	Expression du flot en coordonnées locales	76
8.4	Boîtes de flot	77
8.5	Points singuliers des champs de vecteurs, linéarisation autour d'un point singulier	78
8.6	Stabilité au sens de Liapunov	79
8.7	Points singuliers hyperboliques	81
8.7.1	Le cas linéaire	81
8.7.2	Le cas non-linéaire : le théorème de Grobman-Hartman	82
8.7.3	Le cas non-linéaire : les variétés stables et instables	83
8.8	Exemple : le champ de Rayleigh	86
9	La méthode du gradient	89
9.1	Structures riemanniennes	89
9.2	Le gradient	90
9.3	Le hessien	91
9.4	Propriétés des trajectoires du champ de gradient	93
9.5	Gradient, hessien et optimisation	95

9.6 Approximation du champ de gradient 96

9.7 Exemple : moindres carrés non-linéaires 97

9.8 Exemple : le problème de Procrustes 99

9.9 Exemple : le quotient de Rayleigh généralisé 102

10 La méthode de Newton 107

10.1 L'inverse de Moore-Penrose 107

10.2 Le champ de Newton 109

10.3 Approximation des trajectoires du champ de Newton 111

11 Champ de gradient et champ de Newton sur des structures quotient. 113

11.1 Introduction 113

11.2 Groupes de Lie, espaces d'orbites 114

11.3 Exemples 116

11.3.1 L'espace projectif réel \mathbb{P}_{n-1} 116

11.3.2 La grassmannienne $\mathbb{G}_{n,k}$ 117

11.3.3 La variété des drapeaux \mathbb{F}_n 117

11.4 Le champ de gradient sur un espace d'orbites 118

11.4.1 Le champ de gradient. 118

11.4.2 Le flot du champ de gradient. 118

11.4.3 Le hessien. 119

11.4.4 Valeurs propres du hessien. 119

11.5 Le champ de Newton sur un espace d'orbites 120

Bibliographie 123

Index 125

1. Introduction

De nombreux problèmes posés aux mathématiciens appliqués ont pour substrat géométrique une variété différentiable ou bien une sous-variété d'un espace euclidien. Il y a plusieurs raisons à cela :

- Physiques : la terre est, en première approximation, une sphère, l'espace-temps est "courbe" (nous dit la relativité générale) et c'est sur de tels espaces que les lois de la physique sont écrites,
- Mathématiques : bien des ensembles "naturels" que nous avons à considérer comme la sphère, le tore, l'espace projectif, le groupe orthogonal sont des variétés différentiables ou bien des ensembles plus compliqués "stratifiés" en une union de telles variétés,
- Algorithmiques : des algorithmes classiques de calcul des valeurs propres d'une matrice, d'intégration approchée d'équations différentielles ou bien d'optimisation se ramènent à l'étude de systèmes dynamiques discrets vivant sur des variétés différentiables.

On peut bien sûr étudier de tels problèmes en les considérant comme posés sur des espaces plus gros, vectoriels, et en leur adjoignant des contraintes. C'est le point de vue classique, il permet de travailler sur des espaces euclidiens ou des espaces normés et de récupérer toutes les facilités de l'analyse sur de tels espaces. Mais ce point de vue ne change en rien la structure des problèmes considérés. Pour aller plus loin dans leur compréhension et afin de leur associer des méthodes numériques performantes tout un corpus de recherches actuelles mettent en avant la structure géométrique du problème considéré au lieu de l'éviter.

On est ainsi conduit à utiliser des méthodes d'analyse globale (analyse sur les variétés) ce qui, jusqu'à une époque récente, n'était pas le pain quotidien des mathématiciens appliqués !

Avant d'entrer dans le vif du sujet, donnons quelques exemples.

Le quotient de Rayleigh Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle. Considérons le problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x \rangle$$

où \mathbb{S}^{n-1} est la sphère unité de \mathbb{R}^n . La valeur de ce minimum est égale à la plus petite des valeurs propres de A et il est obtenu lorsque $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ est un vecteur propre

associé à cette valeur propre. Pour atteindre un tel vecteur propre, il suffit de suivre les trajectoires de l'équation différentielle

$$\dot{x} = (xx^T - I_n)Ax.$$

En effet, ces trajectoires sont inscrites sur la sphère, les vecteurs propres normalisés de A en sont les solutions singulières et pour presque toutes les conditions initiales les trajectoires correspondantes se dirigent vers la solution de notre problème. On obtient une méthode numérique en discrétisant de telles trajectoires.

Un modèle géométrique de la colonne vertébrale humaine Dans ce modèle, la colonne vertébrale (1 vertèbre sacrée, 5 lombaires et 12 dorsales) est représentée par un 18-uplet de matrices de rotation 3×3 , chaque matrice représentant la position d'un repère orthonormé direct associé à l'une de ces vertèbres. Dans un tel modèle, la colonne vertébrale est un point de \mathbb{SO}_3^{18} qui est une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^{162} . Lorsque les positions dans l'espace du sacrum et de la première dorsale sont données, la position de la colonne dans l'espace est déterminée par un critère de type "énergie minimum" :

$$\min_{M \in \mathbb{SO}_3^{18}} \Phi(M)$$

où Φ est une quadrique sur l'espace des matrices $(\mathbb{R}^{3 \times 3})^{18}$ et où M_1 et M_{18} sont données. Ce problème a été résolu via une méthode de "Newton-Gauss géométrique."

L'approximation par des matrices de petit rang consiste, étant donné une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ à en rechercher une approximation par une matrice de rang k ce que l'on peut formuler par

$$\min_{X \in \mathcal{R}_k} \|X - M\|_F$$

et où \mathcal{R}_k désigne l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont le rang est égal à k . Cet ensemble est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^{m \times n}$. Ici encore on peut montrer que la solution cherchée est un point d'équilibre attractif pour une équation différentielle sur \mathcal{R}_k et en déduire une approche algorithmique "géométrique".

Autres exemples Citons, parmi les plus célèbres, et en vrac

- L'algorithme QR de recherche des valeurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Cet algorithme se ramène à l'étude de la méthode des approximations successives associée à l'action de la matrice A sur la variété des drapeaux,
- La recherche de sous-espaces invariants de cette même matrice A fait cette fois intervenir l'action de A sur une variété grassmannienne,
- La diagonalisation d'une matrice réelle symétrique via l'équation différentielle "double crochet de Lie",
- La méthode de pénalité en programmation linéaire. Les trajectoires centrales qui y sont associées sont les trajectoires d'une équation différentielle de type "Newton",

- et cetera.

Le cours présenté ici est un tryptique constitué d'éléments de géométrie différentielle, d'exemples de variétés et de sous-variétés et d'une collection de problèmes issus de l'algèbre linéaire et de l'optimisation. Dans la première partie nous introduisons les éléments nécessaires à la compréhension du texte : variétés, espaces tangents, calcul différentiel sur les variétés. Cette partie est accessible à tout étudiant qui a assimilé les notions de base d'algèbre linéaire et de calcul différentiel de licence. Dans la seconde partie nous étudions les exemples qui nous seront utiles : sous-variétés, groupe orthogonal, variétés de Stiefel, de Grassmann, variété des drapeaux, matrices de rang donné. Les exemples d'applications viennent ensuite. Ils présentent des systèmes dynamiques discrets et continus que l'on rencontre en algèbre linéaire et en optimisation.

Peu d'ouvrages traitent du sujet présenté ici. Nous vous recommandons la lecture des livres suivants

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu : Manifolds, Tensor Analysis, and Applications,
- [7] J.-P. Dedieu, Points Fixes, Zéros et la Méthode de Newton,
- [8] M. Demazure M, Catastrophes et Bifurcations,
- [12] U. Helmke, J. B. Moore, Optimization and Dynamical Systems,
- [13] H. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.

Pour en savoir plus, il est nécessaire d'aborder la structure riemannienne : voir par exemple

- [14] J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis,
- [15] B. O'Neil, Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity,
- [19] C. Udriste, Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds.

2. Calcul différentiel

2.1 Calcul différentiel sur les espaces de Banach.

Tous les espaces considérés ici sont des espaces de Banach.

2.1.1 Dérivée d'une application.

Une application définie sur un ouvert $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire et continue $Df(a) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ telle que,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(a+u) - f(a) - Df(a)u}{\|u\|} = 0.$$

$Df(a)$ est la dérivée de f en a . Cette application est unique et la fonction f est continue en a . Pour tout $u \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a + \lambda u) - f(a)}{\lambda} = Df(a)u.$$

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'espace des applications linéaires et continues de \mathbb{E} dans \mathbb{F} . On dit que f est dérivable si elle l'est en tout point de U . Si c'est le cas et si $Df : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est continue, on dit que f est de classe C^1 .

Remarque 2.1 *Lorsque U n'est pas nécessairement ouvert on dit qu'une application $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est différentiable lorsqu'on peut la prolonger en une fonction différentiable $f' : U' \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ définie sur un voisinage ouvert U' de U .*

Théorème 2.1 *(Théorème de dérivation des fonctions composées) Soient U un ouvert de \mathbb{E} et V un ouvert de \mathbb{F} . Si $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow V \subset \mathbb{F}$ est dérivable en $a \in U$ et si $g : V \subset \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$ est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{G}$ est dérivable en a et*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Théorème 2.2 *(Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert de \mathbb{E} . Si $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est de classe C^1 et si $Df(a)$ est bijective alors f est une bijection d'un voisinage ouvert V de a contenu dans U sur un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans \mathbb{F} . De plus $f^{-1} : W \rightarrow V$ est de classe C^1 et*

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

pour tout $x \in V$.

2.1.2 Dérivée seconde.

Lorsque $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est de classe C^1 et que sa dérivée

$$Df : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$$

est dérivable en $a \in U$ on dit que f est deux fois dérivable en a . On note $D^2f(a)$ la dérivée de Df en a et on l'appelle la dérivée seconde de f en a . Cette dérivée seconde est une application linéaire

$$D^2f(a) : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$$

que l'on identifie à l'application bilinéaire suivante

$$(u, v) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow (D^2f(a)u)(v) \in \mathbb{F}.$$

Cette application bilinéaire est symétrique c'est à dire que

$$(D^2f(a)u)(v) = (D^2f(a)v)(u)$$

pour tout $u, v \in \mathbb{E}$. On note alors

$$D^2f(a)(u, v) = (D^2f(a)u)(v)$$

et lorsque $u = v$

$$D^2f(a)u^2 = D^2f(a)(u, u).$$

Bien sûr l'expression u^2 n'a aucun sens en dehors de ce contexte sauf lorsque u est un scalaire.

2.1.3 Dérivée d'ordre p .

Lorsque f est de classe C^{p-1} sur U , la dérivée d'ordre p de f est définie inductivement par

$$D^p f(a) = D(D^{p-1}f)(a).$$

Comme précédemment elle s'identifie à une application p -multilinéaire symétrique

$$D^p f(a) : \mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$$

et l'on note, comme plus haut pour $p = 2$,

$$D^p f(a)u^p = D^p f(a)(u, \dots, u).$$

2.1.4 Norme de la dérivée p -ième d'une application vectorielle.

La norme de la dérivée p -ième d'une application de classe C^p et plus généralement la norme d'une application multilinéaire symétrique continue

$$M : \mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$$

est définie par

$$\|M\| = \sup \frac{\|M(u^1, \dots, u^p)\|}{\|u^1\| \dots \|u^p\|}$$

où le supremum est pris pour des vecteurs non nuls $u^1, \dots, u^p \in \mathbb{E}$. Par cette définition la norme de M est la plus petite constante $K \geq 0$ pour laquelle

$$\|M(u^1, \dots, u^p)\| \leq K \|u^1\| \dots \|u^p\|$$

quels que soient les vecteurs $u^1, \dots, u^p \in \mathbb{E}$.

2.2 Calcul différentiel sur les espaces de Hilbert.

Il n'y a pas grand chose à ajouter à ce qui vient d'être dit sinon introduire deux nouveaux concepts : le gradient et le hessien. Soit $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs scalaires dérivable en $a \in U$. Puisque $Df(a) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue, par le théorème de représentation de Rietz, il existe un unique élément $\nabla f(a) \in \mathbb{E}$ tel que

$$Df(a)x = \langle x, \nabla f(a) \rangle$$

pour tout $x \in \mathbb{E}$. $\nabla f(a)$ s'appelle le gradient de f en a et se note aussi $\text{grad } f(a)$.

Lorsque f est de classe C^1 sur U et si elle est deux fois dérivable en a alors, pour tout $u \in \mathbb{E}$, $D^2f(a)u$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ que l'on identifie, toujours par le théorème de représentation de Rietz, à un élément de \mathbb{E} noté $\text{Hess}(a)u$. On a donc

$$D^2f(a)(u, v) = \langle v, \text{Hess}(a)u \rangle$$

pour tout u et $v \in \mathbb{E}$. $\text{Hess}(a)$ s'appelle le hessien de f en a ,

$$\text{Hess}(a) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

c'est une application linéaire symétrique et continue.

2.3 Fonctions analytiques.

Soit $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{E}$. Nous dirons que f est de classe C^∞ si elle possède des dérivées de tout ordre en tout point de U . Dans ce cas nous pouvons considérer la série de Taylor en a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Son rayon de convergence est donné par $R = \rho^{-1}$ et

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{D^k f(a)}{k!} \right\|^{1/k}.$$

Nous dirons que f est analytique lorsque, pour tout $a \in U$, cette série a un rayon de convergence $R > 0$ et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k f(a)}{k!} (x - a)^k$$

pour tout x tel que $\|x - a\| < R$.

Notons que la série précédente est absolument convergente et que

$$\|f(x)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|D^k f(a)\|}{k!} \|x - a\|^k.$$

Les règles habituelles de dérivation sous le signe somme sont toujours valides : pour tout $p > 0$ et pour tout x tel que $\|x - a\| < R$ on a

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{p+k} f(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Notons qu'ici $D^p f(x)$ et $D^{p+k} f(a)(x - a)^k$ sont des applications p -multilinéaires définies sur $\mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}$ (p fois) et à valeurs dans \mathbb{F} .

2.4 Difféomorphismes

Définition 2.1 Une application $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow V \subset \mathbb{F}$ (U et V ouverts) est un difféomorphisme de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, ou analytique, lorsque f est une bijection de U sur V de classe C^k ou analytique réelle ainsi que son inverse.

Il faut noter que le Théorème d'inversion locale (Théorème 2.2) est un outil puissant pour montrer qu'une application est un difféomorphisme. De façon plus précise on a :

Théorème 2.3 (Théorème d'inversion locale) Soit U un ouvert de \mathbb{E} . Si $f : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ est de classe C^r ou analytique et si $Df(a)$ est bijective alors f est un difféomorphisme de classe C^r ou analytique d'un voisinage ouvert V de a contenu dans U sur un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans \mathbb{F} . De plus

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

pour tout $x \in V$.

3. Sous-variétés différentiables

3.1 Sous-variétés, équations locales, espaces tangent

Définition 3.1 On dit qu'une partie V de l'espace de Banach \mathbb{E} est une sous-variété de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, ou analytique si pour tout point x de V on peut trouver un difféomorphisme ϕ de classe C^r ou analytique d'un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{E} sur un ouvert d'un espace de Banach $\mathbb{H} \times \mathbb{K}$ tel que $\phi(U \cap V) = \phi(U) \cap (\mathbb{H} \times \{0\})$.

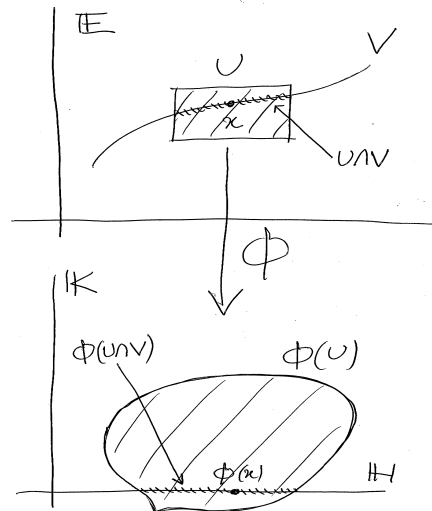


Table 3.1: Sous-variété différentiable.

Par cette définition une sous-variété apparaît localement comme la déformation d'un sous-espace vectoriel par un difféomorphisme. Une autre définition est possible qui décrit un tel ensemble par une équation locale :

Définition 3.2 Soit V une partie de l'espace de Banach \mathbb{E} et soit \mathbb{F} un autre espace de Banach. On dit que $F : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$, où U est un ouvert de \mathbb{E} contenant x , est une équation locale de V en x , de classe C^r ou analytique, si

1. $V \cap U = \{y \in U : F(y) = 0\}$,
2. F est de classe C^r ou analytique et $DF(x)$ est surjective,
3. $\text{Ker } DF(x)$ possède un supplémentaire fermé dans \mathbb{E} .

Remarque 3.1 *La condition 3.2-3 est toujours satisfaite lorsque \mathbb{E} est un espace de Hilbert ou bien un espace normé de dimension finie.*

Définition 3.3 *On dit qu'une partie V de \mathbb{E} est une sous-variété de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, ou analytique si pour tout point x de V on peut trouver une équation locale $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ de V en x de classe C^r ou analytique.*

Proposition 3.1 *Les définitions 3.1 et 3.3 sont équivalentes.*

Preuve. Partons de la définition 3.1. Pour fabriquer une équation locale de V en x il suffit de prendre $F = \Pi_{\mathbb{K}} \circ \phi$ où $\Pi_{\mathbb{K}} : \mathbb{H} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ est la projection sur \mathbb{K} . Comme $DF(x) = \Pi_{\mathbb{K}} \circ D\phi(x)$ cette dérivée est surjective; son noyau est $\text{Ker } DF(x) = D\phi(x)^{-1}(\mathbb{H} \times \{0\})$ qui admet $D\phi(x)^{-1}(\{0\} \times \mathbb{K})$ pour supplémentaire fermé.

Partons de la définition 3.3. On dispose d'une équation locale $F : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ au point $x \in V$. Nous supposons pour simplifier que $x = 0$. Soit E_s un supplémentaire fermé de $\text{Ker } DF(0)$ dans \mathbb{E} et soit

$$\Pi_k : \mathbb{E} \rightarrow \text{Ker } DF(0)$$

la projection de \mathbb{E} sur $\text{Ker } DF(0)$ parallèlement à E_s . Puisque E_s et $\text{Ker } DF(0)$ sont fermés, cette projection est continue. On définit

$$\phi : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \text{Ker } DF(0) \times \mathbb{F}, \quad \phi(u) = (\Pi_k(u), F(u)).$$

Sa dérivée en zéro est $D\phi(0) = (\Pi_k, DF(0))$. On vérifie facilement que c'est un isomorphisme. Ceci prouve, par le théorème d'inversion locale (Théorème 2.2) que ϕ est un difféomorphisme sur un ouvert U_1 de \mathbb{E} tel que $0 \in U_1 \subset U$. On remarque enfin que

$$\phi(U_1 \cap V) = \phi(U_1) \cap \text{Ker } DF(0) \times \{0\}.$$

On obtient ainsi la définition 3.1. ■

Définition 3.4 *Soit V une sous-variété de \mathbb{E} . On appelle espace tangent à $x \in V$ l'espace $T_x V$ des vecteurs vitesse au point x des courbes dans V passant par x . Autrement dit, $v \in T_x V$ s'il existe $\gamma :]-1, 1[\rightarrow V$ de classe C^1 telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$, où l'on note*

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Proposition 3.2 *Soient V une sous-variété de \mathbb{E} , $x \in V$ et F une équation locale de V en x . On a $T_x V = \text{Ker } DF(x)$.*

Preuve. L'inclusion \subset s'obtient par dérivation de $F(\gamma(t)) = 0$ où $\gamma(t)$ est une courbe dans V telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. On a, par dérivation des fonctions composées,

$$DF(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)|_{t=0} = DF(x)v = 0$$

donc $v \in \text{Ker } DF(x)$. Pour prouver l'autre inclusion on se donne $v \in \text{Ker } DF(x)$ et il faut construire une courbe $\gamma(t)$ qui satisfasse aux trois exigences suivantes : $\gamma(t) \in V$, $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. Pour réaliser ce programme, on suppose que $x = 0$ et on utilise le difféomorphisme

$$\phi : U_1 \subset \mathbb{E} \rightarrow \text{Ker } DF(0) \times \mathbb{F}, \quad \phi(u) = (\Pi_k(u), F(u)).$$

décrit au cours de la preuve de la proposition 3.1. A l'aide de ϕ on relève la courbe $t \rightarrow (tv, 0) \in \text{Ker } DF(0) \times \{0\}$ ce qui donne : $\gamma(t) = \phi^{-1}(tv, 0)$. On vérifie alors que γ répond à la question. ■

Corollaire 3.1 *L'espace tangent T_xV est un sous-espace vectoriel fermé de \mathbb{E} .*

Corollaire 3.2 *Lorsque \mathbb{E} est un espace de dimension finie et que V est une partie connexe de \mathbb{E} , la dimension de l'espace tangent T_xV est indépendante de $x \in V$. On la note $\dim V$ et on l'appelle la dimension de V .*

Preuve. Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une équation locale de V au voisinage de $x \in V$. Quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, on peut supposer que $DF(y)$ est surjective pour tout $y \in U$: F est une équation locale de V sur U tout entier. Ainsi $\dim T_yV = \dim \text{Ker } DF(y) = n - m$ est constante sur $U \cap V$. Par connexité de V et par continuité de DF cette dimension est partout la même sur V . ■

Exemple 3.1 *Soit $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^r . Supposons que $\frac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$, que γ soit injective (c'est-à-dire que la courbe soit sans point double) et que $\gamma^{-1} : \gamma(]-1, 1[) \rightarrow]-1, 1[$ soit continue. Sous ces hypothèses l'ensemble $V = \gamma(]-1, 1[) \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^n . L'espace tangent à V en un point est la direction portée par le vecteur $\frac{d\gamma}{dt}$ en ce point.*

Exemple 3.2 *La sphère, le cylindre, le tore sont des sous-variétés de dimension 2 de \mathbb{R}^3 . Par contre le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ ne l'est pas à cause du sommet. Une fois privé de ce sommet il devient une sous-variété.*

Exemple 3.3 *Soient U un ouvert de \mathbb{E} , $F : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ de classe C^r et $V = F^{-1}(0)$. Si, pour tout $x \in V$, $DF(x)$ est surjective et si $\text{Ker } DF(x)$ possède un supplémentaire fermé alors V est une sous-variété de classe C^r et*

$$T_xV = \text{Ker } DF(x).$$

Exemple 3.4 *Soit U un ouvert de \mathbb{E} . Le graphe d'une application $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ de classe C^r est une sous-variété de classe C^r contenue dans $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$. De plus*

$$T_{(x, h(x))} \text{Graphe}(h) = \text{Graphe}(Dh(x)).$$

Exemple 3.5 *La sphère unité d'un espace de Hilbert \mathbb{E} :*

$$S(\mathbb{E}) = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| = 1\}$$

est une sous-variété analytique de \mathbb{E} . Une équation de $S(\mathbb{E})$ est donnée par $F(x) = \|x\|^2 - 1 = 0$; F est analytique et sa dérivée,

$$DF(x) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad DF(x)u = \langle x, u \rangle,$$

est surjective pour tout $x \in S(\mathbb{E})$. L'espace tangent à $S(\mathbb{E})$ en x est donc

$$T_x S(\mathbb{E}) = \{u \in \mathbb{E} : \langle x, u \rangle = 0\} = x^\perp$$

l'orthogonal de x dans \mathbb{E} .

Exemple 3.6 *La sphère unité d'un espace de Banach n'est pas nécessairement une sous-variété : penser à \mathbb{R}^2 muni de la norme*

$$\|(x_1, x_2)\| = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Cette "sphère unité" est ici le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$, ce n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 .

Exemple 3.7 *Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux espaces euclidiens, $\dim \mathbb{E} = n$, $\dim \mathbb{F} = m$, U un ouvert de \mathbb{E} et $F : U \rightarrow \mathbb{F}$ une application de classe C^s , $s \geq 1$, ou analytique. Supposons que le rang de $DF(x)$ soit constant, égal à r pour tout $x \in U$. Alors, $V = F^{-1}(0)$ est une sous-variété de classe C^s ou analytique de \mathbb{E} et sa dimension est $n - r$.*

Prouver l'affirmation contenue dans cet exemple demande un peu de travail. L'argument repose sur une représentation des applications de rang constant : via un changement de variable dans l'espace de départ et un changement de variable dans l'espace d'arrivée, une telle application s'écrit

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Plus précisément

Proposition 3.3 *Avec les hypothèses et les notations de l'exemple 3.7, pour tout $p \in U$, il existe des difféomorphismes*

$$\xi : U_p \rightarrow U_0, \quad \eta : V_{F(p)} \rightarrow V_0,$$

définis sur des ouverts $p \in U_p \subset \mathbb{E}$ et $F(p) \in V_{F(p)} \subset \mathbb{F}$ dont les images sont des ouverts $0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$ et $0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^m$ et tels que :

$$\xi(p) = 0, \quad \eta(F(p)) = 0$$

et

$$\eta \circ F \circ \xi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

pour tout $x \in U_0$.

Preuve. On simplifie l'énoncé en supposant que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$, $p = 0$ et $F(p) = 0$.
Ecrivons

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x)).$$

Puisque $DF(0)$ est de rang r , quitte à renuméroter équations et inconnues, nous supposons que la matrice

$$A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(0) \right)_{1 \leq i, j \leq r}$$

est inversible. On pose alors

$$\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)) = (F_1(x), \dots, F_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n).$$

La dérivée de ξ en 0 est inversible puisque

$$\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(0) \right) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

et que A est inversible. Ceci fait de ξ , par le théorème d'inversion locale (Théorème 2.2), un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n dans un autre voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^n . Notons maintenant

$$\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_m(x)) = F \circ \xi^{-1}(x).$$

On a

$$\psi_i(x) = x_i, \quad 1 \leq i \leq r,$$

de sorte que

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$$

où B est la matrice $(m - r) \times (n - r)$ de terme général $\partial \psi_i / \partial x_j$, $r + 1 \leq i \leq m$, $r + 1 \leq j \leq n$. Comme cette dérivée est de rang r pour tout x dans un voisinage de zéro, la matrice B est identiquement nulle pour tout x et les fonctions ψ_i , $r + 1 \leq i \leq m$, ne dépendent pas des variables x_j , $r + 1 \leq j \leq n$:

$$\psi_i(x) = \psi_i(x_1, \dots, x_r), \quad r + 1 \leq i \leq m.$$

On introduit enfin

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \dots, \eta_m(y)) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - \psi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m - \psi_m(y_1, \dots, y_r)).$$

Sa dérivée en 0 est égale à

$$\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y_j}(0) \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que η est un difféomorphisme sur un voisinage ouvert de 0. On voit enfin que

$$\eta \circ F \circ \xi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

d'où la proposition. ■

Corollaire 3.3 *Sous ces hypothèses $V = F^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension $n - r$.*

Preuve. La proposition précédente montre que pour tout $x \in V$ il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{E} et une application $G : U \rightarrow \mathbb{R}^r$ de même régularité que F , telle que $V \cap U = G^{-1}(0)$: G est une carte locale. ■

Les sous-variétés différentiables constituent un cadre naturel pour les problèmes d'optimisation différentiables avec contraintes de type égalité. L'énoncé suivant donne, dans un tel cadre, des conditions d'optimalité du premier ordre.

Proposition 3.4 *Soit $F : U \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable définie sur un ouvert U d'un espace de Hilbert \mathbb{E} et soit V une sous-variété différentiable de \mathbb{E} , de classe C^1 , contenue dans U . Pour tout $a \in V$ tel que*

$$F(a) = \min_{x \in V} F(x)$$

on a

$$\nabla F(a) \in N_a V$$

l'espace normal à V en a c'est à dire l'orthogonal de l'espace tangent : $N_a V = (T_a V)^\perp$.

Preuve. Suivant la définition 3.1, il existe un difféomorphisme ϕ de classe C^1 d'un voisinage ouvert U' de a dans \mathbb{E} sur un ouvert d'un espace de Banach $\mathbb{H} \times \mathbb{K}$ tel que

$$\phi(U' \cap V) = \phi(U') \cap (\mathbb{H} \times \{0\}).$$

Quitte à remplacer U , U' et V par des ensembles plus petits, on peut supposer que $U = U'$ de sorte que

$$\phi(V) = \phi(U) \cap (\mathbb{H} \times \{0\}).$$

Posons $W = \phi(U)$. Le difféomorphisme inverse

$$\psi = \phi^{-1} : W \subset \mathbb{H} \times \mathbb{K} \rightarrow U \subset \mathbb{E}$$

vérifie

$$\psi(W \cap (\mathbb{H} \times \{0\})) = V.$$

De plus, en notant $b = \phi(a)$,

$$D\psi(b)(\mathbb{H} \times \{0\}) = T_a V.$$

En effet, soit $u \in T_a V$. Par la définition 3.4 il existe une courbe C^1 , $\gamma(t) \in V$, telle que $\gamma(0) = a$ et $\dot{\gamma}(0) = u$. On a $\phi(\gamma(t)) \in W \cap (\mathbb{H} \times \{0\})$ et donc

$$v = \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t))|_{t=0} = D\phi(a)u \in \mathbb{H} \times \{0\}.$$

ceci prouve que

$$u = D\phi(a)^{-1}v = D\psi(b)v$$

pour un vecteur $v \in \mathbb{H} \times \{0\}$. Réciproquement, soit $u = D\psi(b)v$ avec $v \in \mathbb{H} \times \{0\}$. Notons

$$\gamma(t) = \psi(b + tv).$$

Il est facile de voir que $\gamma(t) \in V$, $\gamma(0) = a$ et que $\dot{\gamma}(0) = D\psi(b)v$. Ceci prouve l'égalité $D\psi(b)(\mathbb{H} \times \{0\}) = T_aV$.

Revenons à notre minimum. Puisque $F(a) \leq F(x)$ pour tout $x \in V$ on a aussi $F(\psi(b)) \leq F(\psi(y))$ pour tout $y \in W \cap (\mathbb{H} \times \{0\})$ et b réalise le minimum de la fonction dérivable $F \circ \psi$ définie sur un ouvert d'un espace normé. C'est donc un point stationnaire de $F \circ \psi$:

$$D(F \circ \psi)(b) = DF(a) \circ D\psi(b) = 0.$$

Cela signifie que $DF(a)(D\psi(b)v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{H} \times \{0\}$ ou, en d'autres termes, que $DF(a)u = 0$ pour tout $u \in T_aV$ c'est à dire que $\nabla F(a) \in (T_aV)^\perp = N_aV$. ■

Remarque 3.2 *On a un énoncé similaire pour des espaces de Banach. Il faut alors introduire le dual \mathbb{E}^* de \mathbb{E} (espace des formes linéaires continues sur \mathbb{E}) ainsi que l'espace normal :*

$$N_aV = \{x^* \in \mathbb{E}^* : x^*(x) = 0 \text{ pour tout } x \in T_aV\}.$$

La condition d'optimalité devient $DF(a) \in N_aV$.

3.2 Le groupe orthogonal

Soit \mathbb{E} un espace euclidien. Un endomorphisme u de \mathbb{E} est orthogonal si

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tout $x, y \in \mathbb{E}$ ou, ce qui revient au même, si

$$u^*u = uu^* = \text{id}_E$$

où u^* désigne l'adjoint de u . L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de \mathbb{E} est un groupe pour la composition des applications que l'on note $\mathcal{O}(\mathbb{E})$.

En utilisant une base orthonormée de \mathbb{E} on montre que $\mathcal{O}(\mathbb{E})$ est isomorphe au groupe orthogonal de \mathbb{R}^n avec $n = \dim \mathbb{E}$. Ce dernier est noté \mathcal{O}_n . C'est l'ensemble des matrices $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$U^T U = U U^T = I_n.$$

\mathcal{O}_n est un groupe pour la multiplication des matrices.

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à -1 ou à $+1$. L'ensemble des matrices $U \in \mathcal{O}_n$ telles que $\det U = 1$ est un sous-groupe de \mathcal{O}_n appelé groupe spécial orthogonal ou encore groupe des rotations. On le note \mathcal{SO}_n .

Du point de vue topologique, \mathcal{O}_n est un sous-espace compact de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Il possède deux composantes connexes données par $\det U = \pm 1$. Nous allons voir que c'est aussi une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Théorème 3.1 \mathbb{O}_n est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^{n \times n}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. L'espace tangent en l'identité est l'espace des matrices antisymétriques

$$T_{I_n} \mathbb{O}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + A^T = 0\}$$

et l'espace tangent en $U \in \mathbb{O}_n$ est

$$T_U \mathbb{O}_n = UT_{I_n} \mathbb{O}_n = \{UA \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + A^T = 0\}.$$

Démonstration. La preuve utilise l'exemple 3.7. On considère l'application

$$P : \mathbb{GL}_n \subset \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P(U) = UU^T - I_n$$

où, rappelons le, \mathbb{GL}_n désigne le groupe des matrices réelles, $n \times n$ et inversibles. Il est clair que $\mathbb{O}_n = P^{-1}(0)$. Nous allons voir que, pour tout $U \in \mathbb{GL}_n$ l'application linéaire

$$DP(U) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad DP(U)V = UV^T + VU^T$$

est de rang constant. Cela résulte du fait que $V \in \text{Ker } DP(U)$ si et seulement si $V = UA$ où A est une matrice antisymétrique. Ce calcul donne aussi l'espace tangent. ■

Exemple 3.8 Le mouvement d'un solide autour d'un point est décrit par celui d'un repère orthonormé attaché à ce solide et dont l'origine est au point de rotation. Ce mouvement est donc donné par une application

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{SO}_3.$$

■

3.3 La variété de Stiefel

La variété de Stiefel $\mathbb{S}_{n,k}$ est l'ensemble des matrices $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$ telles que

$$U^T U = I_k$$

autrement dit, les k vecteurs colonnes de U constituent une base orthonormée du sous-espace vectoriel $\text{Im } U$ de \mathbb{R}^n engendré par ces vecteurs colonnes. Notons que UU^T est la matrice de la projection orthogonale dans \mathbb{R}^n sur le sous-espace $\text{Im } U$. Nous allons voir que $\mathbb{S}_{n,k}$ est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^{n \times k}$, de dimension

$$\dim \mathbb{S}_{n,k} = (n-k)k + \frac{k(k-1)}{2} = nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Notons $I_{n,k} \in \mathbb{S}_{n,k}$ la matrice dont les colonnes sont les k premiers vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . Soient $U \in \mathbb{S}_{n,k}$ et $P \in \mathbb{O}_n$ tels que $U = PI_{n,k}$. On a

$$1. \quad T_{I_{n,k}} \mathbb{S}_{n,k} = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ W \end{pmatrix} : A \in \mathbb{R}^{k \times k}, A \text{ antisymétrique}, W \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k} \right\},$$

2. $T_U \mathbb{S}_{n,k} = PT_{I_{n,k}} \mathbb{S}_{n,k}$.

Démonstration. Considérons l'application

$$F : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}, \quad F(X) = X^T X - I_k.$$

Elle est polynomiale, donc analytique, et sa dérivée vaut

$$DF(X)V = X^T V + V^T X.$$

Nous allons voir que $DF(X)$ est une application de rang constant pour tout $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$, X de rang k , qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{n \times k}$ contenant $\mathbb{S}_{n,k}$. Il suffira ensuite d'utiliser l'exemple 3.7. Soit $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, S inversible, avec $X = SI_{n,k}$. Un tel S existe puisque l'on a supposé que X est de rang k . On a $V \in \text{Ker } DF(X)$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, antisymétrique, telle que $X^T V = A$ c'est à dire si et seulement si $I_{n,k}^T (S^T V) = A$ donc si et seulement si $S^T V \in \text{Ker } DF(I_{n,k})$. Ainsi

$$\text{Ker } DF(X) = S^{-T} \text{Ker } DF(I_{n,k})$$

et tous ces noyaux sont de même dimension. Donc $\text{Rang } DF(X)$ est constant pour tout X de rang k .

Lorsque $X = U \in \mathbb{S}_{n,k}$ on peut prendre $S = P \in \mathbb{O}_n$ d'où

$$\text{Ker } DF(U) = P \text{Ker } DF(I_{n,k}).$$

Ce dernier noyau est donné par

$$\text{Ker } DF(I_{n,k}) = \left\{ \begin{pmatrix} A \\ W \end{pmatrix} : A \in \mathbb{R}^{k \times k}, A \text{ antisymétrique}, W \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k} \right\}.$$

Ce calcul décrit les espaces tangent en $I_{n,k}$ et en U et donne la dimension de la sous-variété. ■

Lorsque $k = 1$ la variété de Stiefel n'est autre que la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R}^n et lorsque $k = n$ c'est le groupe orthogonal \mathbb{O}_n .

3.4 Applications de rang donné

Théorème 3.2 Notons \mathcal{R}_k l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont le rang est égal à k . C'est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^{m \times n}$ dont la dimension est $k(m + n - k)$. Elle est connexe si $k < \min(m, n)$.

Démonstration. Pour prouver que \mathcal{R}_k est une sous-variété nous allons en donner des équations locales. Soit $X \in \mathcal{R}_k$. Il existe deux matrices de permutation P et Q telles que

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $C \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}$, $D \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}$ et $\det A \neq 0$. Notons $\mathcal{X}_k(P, Q)$ l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dont le rang est $\geq k$ et qui vérifient la propriété ci-dessus et posons

$$\mathcal{R}_k(P, Q) = \mathcal{X}_k(P, Q) \cap \mathcal{R}_k.$$

Lorsque l'on fait varier P et Q , les ensembles $\mathcal{X}_k(P, Q)$ constituent un recouvrement de \mathcal{R}_k par des ouverts de $\mathbb{R}^{m \times n}$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{X}_k(P, Q)$ on a

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\text{Rang } X = \text{Rang } A + \text{Rang } (D - CA^{-1}B) = k + \text{Rang } (D - CA^{-1}B).$$

Ceci prouve que

$$\text{Rang } X = k \text{ si et seulement si } D = CA^{-1}B.$$

Ainsi $\mathcal{R}_k(P, Q)$ est le graphe de l'application

$$\varphi : \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{k \times k} \times \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}, \quad \varphi(A, B, C) = CA^{-1}B$$

où

$$\mathcal{W} = \{(A, B, C) : \det A \neq 0\}.$$

Ceci prouve aussi que $\mathcal{R}_k(P, Q)$ est l'ensemble des zéros de

$$\Phi : \mathcal{X}_k(P, Q) \rightarrow \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)}, \quad \Phi(A, B, C, D) = D - \varphi(A, B, C)$$

dont la dérivée est clairement surjective.

Pour montrer que \mathcal{R}_k est connexe il suffit de noter que toute matrice X de rang k peut s'écrire

$$X = U \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

où U et V sont inversibles. La matrice $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède au moins une ligne ou une colonne de zéros ce qui permet de modifier U et V pour que leurs déterminants soient > 0 . L'ensemble des matrices inversibles à déterminant positif est connexe donc \mathcal{R}_k l'est aussi. ■

L'espace tangent à $X \in \mathcal{R}_k(P, Q)$ est le graphe de la dérivée

$$D\varphi(A, B, C) : \mathbb{R}^{k \times k} \times \mathbb{R}^{k \times (n-k)} \times \mathbb{R}^{(m-k) \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)},$$

de sorte que

$$T_X \mathcal{R}_k = \left\{ P^T \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix} Q^T \text{ avec } U \in \mathbb{R}^{k \times k}, V \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}, W \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}, \right. \\ \left. Z \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (n-k)} : Z = -CA^{-1}UA^{-1}B + CA^{-1}V + WA^{-1}B \right\}.$$

3.5 La variété d'incidence

Notons $\mathcal{P}_{d,n}$ l'espace vectoriel des systèmes polynomiaux $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\deg f \leq d$. Cet espace est muni d'une structure euclidienne quelconque. Notons

$$\text{Eval} : \mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{Eval}(f, x) = f(x)$$

la fonction d'évaluation ainsi que

$$V = \{(f, x) \in \mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n : \text{Eval}(f, x) = 0\}.$$

V est une sous-variété différentiable de $\mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n$ de dimension $\dim \mathcal{P}_{d,n}$ appelée "variété d'incidence". C'est une conséquence du fait que

$$D\text{Eval}(f, x) : \mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D\text{Eval}(f, x)(\dot{f}, \dot{x}) = \dot{f}(x) + Df(x)\dot{x}$$

est surjective (\dot{f} suffit) et de l'exemple 3.3.

L'espace tangent associé à V est

$$T_{(f,x)}V = \left\{ (\dot{f}, \dot{x}) \in \mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n : \dot{f}(x) + Df(x)\dot{x} = 0 \right\}.$$

Lorsque $Df(x)$ est inversible, on peut exprimer \dot{x} en fonction de \dot{f} :

$$T_{(f,x)}V = \left\{ (\dot{f}, \dot{x}) \in \mathcal{P}_{d,n} \times \mathbb{R}^n : \dot{x} = -Df(x)^{-1}\dot{f}(x) \right\}.$$

4. Variétés différentiables

4.1 Variétés

Définition 4.1 Soit M un espace topologique séparé. Une carte sur M est un homéomorphisme ϕ d'un ouvert U de M sur un ouvert d'un espace \mathbb{R}^n . Cette carte est notée (U, ϕ) . Un atlas de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, ou $k = \omega$, est une famille de cartes $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ telle que

1. $M = \cup_{i \in I} U_i$,
2. Quelles que soient les cartes (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'application

$$\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} |_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

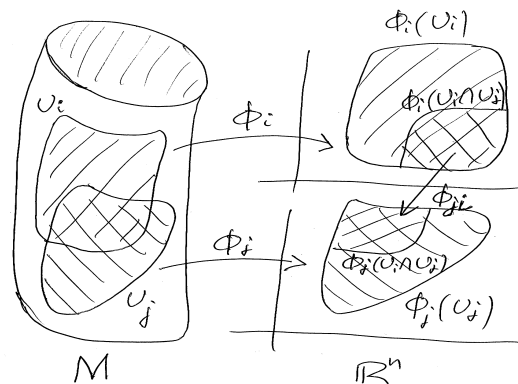


Table 4.1: L'application ϕ_{ji} .

Définition 4.2 Deux atlas de classe C^k , \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sur M , sont équivalents si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un atlas de classe C^k . La réunion de tous les atlas équivalents à un atlas donné définit un atlas maximal sur M . La donnée de M et d'un atlas maximal de classe C^k définit une variété différentiable de classe C^k modelée sur \mathbb{R}^n . On définit alors la dimension de M par

$$\dim M = n.$$

Exemple 4.1 Sous-variétés de \mathbb{R}^n . Une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^n est une variété. ■

4.2 Sous-variétés, produits de variétés.

Définition 4.3 Une sous-variété d'une variété M modelée sur \mathbb{R}^n est un ensemble $S \subset M$ muni de la topologie induite tel que, pour tout $s \in S$, il existe une carte (U, ϕ) en s et une décomposition $\mathbb{R}^n = E \times F$ en un produit de deux espaces vectoriels pour laquelle

$$\phi : U \rightarrow E \times F \text{ et } \phi(U \cap S) = \phi(U) \cap (E \times \{0\}).$$

On retrouve exactement la définition donnée d'une sous-variété de \mathbb{R}^n . Une sous-variété est elle-même une variété et un atlas est donné par

$$\{(U \cap S, \phi|_{U \cap S}) : (U, \phi) \text{ carte de } M\}.$$

Définition 4.4 Le produit de deux variétés M_1 et M_2 est constitué du produit cartésien $M_1 \times M_2$ muni de la topologie produit et de l'atlas engendré par les cartes

$$\{(U_1 \times U_2, \phi_1 \times \phi_2) : (U_1, \phi_1) \text{ carte de } M_1, (U_2, \phi_2) \text{ carte de } M_2\}.$$

Si M_1 est modelée sur \mathbb{R}^{n_1} et M_2 sur \mathbb{R}^{n_2} alors $M_1 \times M_2$ est modelée sur $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

Un exemple classique de variété produit est celui du "tore" $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$: n copies du cercle unité.

4.3 Variétés quotients

4.3.1 Espaces topologiques quotients

A côté des variétés "concrètes" que sont les sous-variétés, nous sommes amenés à considérer des espaces "abstraites" obtenus par passage au quotient via une relation d'équivalence.

Soient M un espace topologique, N un ensemble et $\pi : M \rightarrow N$ une application surjective de sorte que N s'identifie à l'espace quotient de M par la relation d'équivalence $x \equiv y$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(y)$. La topologie quotient sur N est celle dont les ouverts sont les ensembles $U \subset N$ tels que $\pi^{-1}(U)$ soit un ouvert

de M . Pour cette topologie, une application $f : N \rightarrow P$ de N vers un autre espace topologique P est continue si et seulement si $f \circ \pi : M \rightarrow P$ est continue.

Il arrive parfois qu'un espace topologique puisse être défini comme espace quotient de plusieurs façons différentes. Par exemple l'espace projectif réel (voir ci-dessous) est le quotient de $(\mathbb{R}^n)^*$ par les homothéties mais c'est aussi le quotient de la sphère \mathbb{S}^{n-1} par la relation d'antipodie. La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions les structures topologiques quotients correspondantes sont identiques. Voici un énoncé dans ce sens (voir [4]).

Lemme 1 *Soient M un espace topologique, R une relation d'équivalence dans M , $\pi : M \rightarrow M/R$ la surjection canonique, P une partie de M et R_P la relation d'équivalence dans P induite par R . Notons h l'application canonique de P/R_P sur $\pi(P)$. S'il existe une application continue $f : M \rightarrow P$ telle que $f(x)Rx$ pour tout $x \in M$ alors h est un homéomorphisme de P/R_P sur M/R .*

L'exemple de l'espace projectif réel envisagé ci-dessous entre bien dans ce cadre : la relation d'équivalence induite sur la sphère par " $x \equiv y$ s'il existe $\lambda \neq 0$ avec $y = \lambda x$ " est bien la relation d'antipodie : " $x \equiv y$ si $y = x$ ou $y = -x$ " puisque $\|x\| = \|y\| = 1$. Il suffit de prendre $f(x) = x/\|x\|$ pour voir que les hypothèses du lemme sont satisfaites. Les deux quotients donnent donc la même topologie sur l'espace projectif réel.

4.3.2 Exemples : L'espace projectif réel.

L'espace projectif réel $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites issues de l'origine contenues dans \mathbb{R}^n . On le définit aussi comme le quotient de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $(x_1, \dots, x_n) \equiv (y_1, \dots, y_n)$ si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tel que $x_i = \lambda y_i$ pour tout i . Les classes d'équivalence de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pour cette relation sont les droites vectorielles dans \mathbb{R}^n privées de l'origine. Soit

$$\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$$

la surjection canonique. $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est muni de la topologie quotient : les ouverts de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ sont les images par π des ouverts de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Pour faire de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ une variété différentiable il nous faut construire un atlas. Notons

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \neq 0\}.$$

V_i est un ouvert de \mathbb{R}^n de sorte que $U_i = \pi(V_i)$ est un ouvert de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. De plus $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Pour construire une carte locale (U_i, ϕ_i) on pose

$$\phi_i(p) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \text{ avec } p = \pi(x_1, \dots, x_n) \in U_i$$

et où \hat{x}_i indique que cette composante est manquante. L'application ϕ_i est bijective, elle est continue parce que $\phi_i \circ \pi$ est continue, son inverse

$$\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U_i$$

est donné par

$$\phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \pi(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1}).$$

Cette application est clairement continue. Lorsque $j > i$

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est donnée par

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{y_{j-1}}(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, \hat{y}_{j-1}, \dots, y_{n-1})$$

et, lorsque $j < i$, par

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{y_j}(y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1}).$$

Ces applications sont analytiques réelles ce qui prouve que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est une variété analytique modelée sur \mathbb{R}^{n-1} .

4.3.3 Exemples : L'espace projectif complexe.

L'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites complexes issues de l'origine contenues dans \mathbb{C}^n . C'est une variété analytique compacte modelée sur \mathbb{C}^{n-1} ou bien sur \mathbb{R}^{2n-2} . C'est aussi le quotient de la sphère \mathbb{S}^{2n-1} par la relation d'équivalence "être sur un même grand cercle".

On peut construire un atlas de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ en utilisant des coordonnées homogènes comme cela a été fait pour l'espace projectif réel mais en considérant, cette fois, des scalaires complexes.

4.3.4 Exemples : La grassmannienne.

La grassmannienne $\mathbb{G}_{n,k}$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k contenus dans \mathbb{R}^n . Pour $k = 1$ nous retrouvons l'espace projectif réel : $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{G}_{n,1}$.

Quelle structure de donnée permet de décrire $\mathbb{G}_{n,k}$? Un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de dimension k peut être représenté par une base (V_1, \dots, V_k) c'est à dire par une matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ dont le rang est k . Nous notons $\mathbb{GL}_{n,k}$ l'ensemble de ces matrices, c'est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^{n \times k}$. Il est clair qu'un sous-espace donné peut avoir plusieurs bases. On est donc amené à considérer, sur $\mathbb{GL}_{n,k}$, la relation d'équivalence $V \equiv V'$ si et seulement si les bases (V_i) et (V'_i) engendrent le même sous-espace. C'est le cas si et seulement s'il existe $X \in \mathbb{GL}_k$ (matrices $k \times k$ inversibles) avec $V' = VX$. C'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{GL}_{n,k}$ et la grassmannienne s'identifie à l'ensemble quotient qui lui est associé. On note

$$\pi : \mathbb{GL}_{n,k} \rightarrow \mathbb{G}_{n,k}$$

la surjection canonique et on équipe $\mathbb{G}_{n,k}$ de la topologie quotient : les ouverts de $\mathbb{G}_{n,k}$ sont les images par π des ouverts de $\mathbb{GL}_{n,k}$.

Il nous faut maintenant décrire un atlas sur $\mathbb{G}_{n,k}$. Pour toute matrice de permutation $P \in \mathcal{P}_n$ (matrices $n \times n$ orthogonales dont les lignes ne contiennent que des 0 ou des 1) posons

$$G_P = \left\{ \pi(V) : PV = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, U \in \mathbb{GL}_k \right\}.$$

C'est un ensemble ouvert dans $\mathbb{G}_{n,k}$ et la réunion des ensembles G_P recouvre la grassmannienne. La définition donnée de G_P ne dépend pas de V mais bien de $\pi(V)$. En effet, si $\pi(V) = \pi(V')$, c'est à dire si $V' = VX$ avec X inversible, on a

$$PV' = \begin{pmatrix} UX \\ WX \end{pmatrix}$$

avec $UX \in \mathbb{GL}_k$. On construit une carte locale définie sur G_P en posant

$$\phi_P : G_P \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times k}, \phi_P(\pi(V)) = WU^{-1}.$$

Ici encore la définition donnée est indépendante du représentant choisi : si $\pi(V) = \pi(V')$, c'est à dire si $V' = VX$ avec X inversible, on a $(WX)(UX)^{-1} = WU^{-1}$.

L'application ϕ_P est surjective : pour tout $W \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ on a

$$W = WI_k^{-1} = \phi_P \left(P^{-1} \begin{pmatrix} I_k \\ W \end{pmatrix} \right).$$

L'application ϕ_P est injective : si $\phi_P(V_1) = \phi_P(V_2)$ c'est que

$$PV_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ W_1 \end{pmatrix}, PV_2 = \begin{pmatrix} U_2 \\ W_2 \end{pmatrix} \text{ et } W_1U_1^{-1} = W_2U_2^{-1}.$$

Ceci prouve que

$$V_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U_2 \\ W_2 \end{pmatrix} U_2^{-1}U_1 = V_2(U_2^{-1}U_1)$$

de sorte que $\pi(V_1) = \pi(V_2)$.

ϕ_P est continue parce que

$$\phi_P \circ \pi : \pi^{-1}G_P \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$$

est continue.

ϕ_P^{-1} est continue parce que

$$\phi_P^{-1}(W) = \pi \left(P^{-1} \begin{pmatrix} I_k \\ W \end{pmatrix} \right)$$

est continue.

Nous venons de prouver que ϕ_P est un homéomorphisme. Montrons que les différentes cartes sont compatibles. Prenons deux matrices de permutation $P, Q \in \mathcal{P}_n$. On a

$$\phi_Q \circ \phi_P^{-1}(W) = W'U'^{-1}$$

avec

$$QP^{-1} \begin{pmatrix} I_k \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U' \\ W' \end{pmatrix}.$$

Cette expression montre que $\phi_Q \circ \phi_P^{-1}(W)$ est une expression rationnelle en les entrées de W . Ainsi $\mathbb{G}_{n,k}$ est une variété analytique réelle modelée sur $\mathbb{R}^{(n-k) \times k}$.

Une dernière et importante remarque : on peut aussi décrire la grassmannienne comme l'espace quotient de la variété de Stiefel $\mathbb{S}_{n,k}$ par le groupe orthogonal \mathbb{O}_k : V et $V' \in \mathbb{S}_{n,k}$ sont équivalents si $V' = VX$ pour un $X \in \mathbb{O}_k$. Ceci revient à prendre pour structure de donnée une base orthonormale d'un sous-espace au lieu d'une base quelconque. Il n'est pas trop difficile de montrer que les topologies associées aux quotients $\mathbb{GL}_{n,k}/\mathbb{GL}_k$ et $\mathbb{S}_{n,k}/\mathbb{O}_k$ sont identiques. Ceci prouve que $\mathbb{G}_{n,k}$ est un espace compact puisque c'est l'image de $\mathbb{S}_{n,k}$ qui est compact par l'application π .

4.3.5 Exemples : La variété des drapeaux.

La variété des drapeaux \mathbb{F}_n est l'ensemble des n -uplets $F = (F_1, \dots, F_n)$ où F_i est un sous-espace vectoriel de dimension i de \mathbb{R}^n tel que $F_i \subset F_{i+1}$ pour tout i . Pour représenter un tel objet on se donne une matrice $A \in \mathbb{GL}_n$ et on prend

$$F_i = [A_1, \dots, A_i]$$

le sous-espace engendré par les i premiers vecteurs colonnes de A . Deux matrices A et $B \in \mathbb{GL}_n$ définissent le même drapeau si et seulement si $A = BR$ pour une matrice R triangulaire supérieure. Ceci conduit à décrire la variété des drapeaux comme l'espace quotient

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{GL}_n / \mathbb{R}_n$$

où l'on désigne par \mathbb{R}_n l'espace des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Notons

$$\pi : \mathbb{GL}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$$

la surjection canonique. On notera aussi $\pi(X) = \langle X \rangle$ la classe de $X \in \mathbb{GL}_n$. On munit \mathbb{F}_n de la topologie quotient. Nous allons voir que c'est une variété analytique modelée sur $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Notons \mathbb{L}_1 l'ensemble des matrices $n \times n$, réelles, triangulaires inférieures et qui ont des 1 sur la diagonale. La décomposition LR d'une matrice, obtenue par le pivot de Gauss, montre qu'il existe un ensemble ouvert et dense $\mathcal{O} \subset \mathbb{GL}_n$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{O}$, on ait $A = LR$ avec $L \in \mathbb{L}_1$ et $R \in \mathbb{R}_n$ ($A \in \mathcal{O}$ si et seulement si les déterminants des sous-matrices $A^k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, $1 \leq k \leq n$, sont non-nuls. Ainsi \mathcal{O} est le complémentaire dans $\mathbb{R}^{n \times n}$ d'une variété algébrique non triviale, c'est donc un

ouvert dense). Pour toute autre matrice $B = AS$, $S \in \mathbb{R}_n$, on a $B = LRS$ ce qui permet de définir une application

$$\mathcal{L} : \pi(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{L}_1, \quad \mathcal{L}(\langle A \rangle) = L.$$

Nous allons prouver que \mathcal{L} est un homéomorphisme de $\pi(\mathcal{O})$ sur \mathbb{L}_1 .

- \mathcal{L} est surjective. En effet, pour tout $L \in \mathbb{L}_1$ on a $\mathcal{L}(\langle L \rangle) = L$.
- \mathcal{L} est injective. Si $\mathcal{L}(\langle A \rangle) = \mathcal{L}(\langle B \rangle) = L$ c'est que $A = LR$ et $B = LR'$ avec $R, R' \in \mathbb{R}_n$. Ces égalités montrent que $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.
- \mathcal{L} est continue. En effet $\mathcal{L} \circ \pi : A \rightarrow L$ est continue.
- \mathcal{L}^{-1} est continue. En effet $\mathcal{L}^{-1}(L) = \langle L \rangle$ pour tout $L \in \mathbb{L}_1$.

Pour construire un atlas de \mathbb{F}_n on considère l'ensemble Σ_n des matrices de permutation et, pour $P \in \Sigma_n$, l'ensemble

$$\mathcal{O}_P = \{P^{-1}A : A \in \mathcal{O}\}$$

et l'application

$$\mathcal{L}_P : \pi(\mathcal{O}_P) \rightarrow \mathbb{L}_1, \quad \mathcal{L}_P(\langle B \rangle) = \mathcal{L}(\langle PB \rangle)$$

de sorte que

$$\mathcal{L}_P(\langle B \rangle) = L \text{ si et seulement si } PB = LR, \quad R \in \mathbb{R}_n.$$

Notons que la réunion des ensembles \mathcal{O}_P , $P \in \Sigma_n$, est égale à \mathbb{GL}_n : cela se prouve en considérant la méthode du pivot de Gauss avec permutation des lignes (pivot partiel).

L'application \mathcal{L}_P est bien définie et c'est un homéomorphisme. Pour deux matrices de permutation P et Q et une matrice $L \in \mathcal{L}_Q(\pi(\mathcal{O}_P))$ on a

$$\mathcal{L}_P \circ \mathcal{L}_Q^{-1}(L) = L_1 \text{ si et seulement si } PQ^{-1}L = L_1R_1$$

pour une matrice $R_1 \in \mathbb{R}_n$. Ceci prouve que L_1 est une fonction rationnelle (donc analytique) des entrées de L et que les applications $(\pi(\mathcal{O}_P), \mathcal{L}_P)_{P \in \Sigma_n}$ constituent un atlas de \mathbb{F}_n .

4.4 Motivations

Pourquoi s'intéresser à des espaces aussi compliqués que l'espace projectif, la grassmannienne et la variété des drapeaux ? Voici un exemple. $A \in \mathbb{GL}_n$ définit une action sur \mathbb{P}_{n-1} par

$$\bar{A} : \mathbb{P}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}, \quad \bar{A}(\pi(x)) = \pi(A(x)).$$

Un point fixe de \bar{A} vérifie

$$\bar{A}(\pi(x)) = \pi(x)$$

c'est à dire

$$\pi(A(x)) = \pi(x)$$

ou encore

$$A(x) = \lambda x$$

pour un scalaire λ non nul. Un point fixe de \bar{A} est une direction propre associée à une valeur propre de A .

On définit de même une action sur la grassmannienne :

$$A_{\clubsuit} : \mathbb{G}_{n,k} \rightarrow \mathbb{G}_{n,k}, \quad A_{\clubsuit}(X) = A(X).$$

Un point fixe $X \in \mathbb{G}_{n,k}$ de A_{\clubsuit} est un sous-espace de dimension k de \mathbb{R}^n invariant par A .

On définit enfin une action sur la variété des drapeaux :

$$A_{\ddagger} : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n, \quad A_{\ddagger}(F_1, \dots, F_n) = (A(F_1), \dots, A(F_n)).$$

Supposons que $Q \in \mathbb{O}_n$ soit un représentant de F , c'est à dire que $\langle Q \rangle = F$. Il est clair que AQ est un représentant de $A_{\ddagger}(F)$ c'est à dire que $\langle AQ \rangle = A_{\ddagger}(F)$. Si F est un point fixe de A_{\ddagger} on a $A_{\ddagger}(F) = F$ d'où $\langle AQ \rangle = \langle Q \rangle$ autrement dit $AQ = QR$ pour une matrice triangulaire supérieure R . Les points fixes de A_{\ddagger} correspondent aux décompositions de Schur de A :

$$A = QRQ^T, \quad Q \in \mathbb{O}_n, \quad R \text{ triangulaire supérieure.}$$

5. Espaces tangents

5.1 Vecteurs tangents

Définition 5.1 Une fonction $f : M \rightarrow N$ où M et N sont des variétés de classe C^k est dite de classe C^r , $0 \leq r \leq k$, lorsque pour tout $x \in M$ il existe des cartes (U, ϕ) de M avec $x \in U$, (V, ψ) de N avec $f(x) \in V$ telles que $f(U) \subset V$ et que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ soit de classe C^r .

Notons que cette définition ne dépend pas des cartes choisies et que la propriété "être de classe C^r " est stable par composition et par inversion.

Exemple 5.1 Supposons que M soit une sous-variété de classe C^k de \mathbb{R}^n . Une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^r au sens de la définition ci-dessus si et seulement si, pour tout $x \in M$, on peut trouver un voisinage ouvert U de x dans \mathbb{R}^n et une application $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r qui prolonge f sur $M \cap U$. ■

Définition 5.2 1. Une courbe passant par $m \in M$ est une application $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et telle que $c(0) = m$.

2. Deux courbes c_1 et c_2 passant par m sont tangentes en ce point s'il existe une carte (U, ϕ) en m telle que

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c_2)(0).$$

3. La relation de tangence des courbes est une relation d'équivalence; on note $[c]_m$ la classe de c . Les classes d'équivalences sont appelées "vecteurs tangents en m " et leur ensemble, noté $T_m M$, est appelé "espace tangent en m ". On note enfin TM le "fibré tangent en m "; c'est la réunion disjointe des espaces tangents :

$$TM = \cup_{m \in M} T_m M.$$

L'application

$$\tau_M : TM \rightarrow M, \quad \tau_M([c]_m) = m$$

est la "projection du fibré TM sur sa base M ".

L'application construite à l'aide de la carte (U, ϕ) par

$$\theta_m : T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \theta_m([c]_m) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c)(0)$$

est bien définie et c'est une bijection de $T_m M$ sur \mathbb{R}^n . La bijection réciproque est donnée par

$$\theta_m^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_m M, \quad \theta_m^{-1}(u) = [\phi^{-1}(\phi(m) + tu)].$$

On construit sur $T_m M$ une structure d'espace vectoriel réel en transportant par θ_m^{-1} la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n : on pose

$$\theta_m^{-1}(u) + \theta_m^{-1}(u') = \theta_m^{-1}(u + u'), \quad \lambda \theta_m^{-1}(u) = \theta_m^{-1}(\lambda u).$$

Pour cette structure $T_m M$ est un espace vectoriel de dimension n et θ_m est un isomorphisme. Si (U, ϕ') est une autre carte et si θ' l'application qui lui est associée, on voit que

$$\theta' \circ \theta^{-1} : u \in \mathbb{R}^n \rightarrow (D(\phi' \circ \phi^{-1})(\phi(x))) u \in \mathbb{R}^n$$

est une application linéaire bijective. Ainsi la structure vectorielle de $T_m M$ est indépendante de la carte choisie. Sa dimension est

$$\dim T_m M = n,$$

elle est égale à la dimension de M .

Exemple 5.2 Espace tangent à \mathbb{P}_{n-1} . Pour construire l'espace tangent à $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$, $\|x\| = 1$, on considère la carte locale (U, ϕ) avec

$$U = \{\pi(x + y) : y \in x^\perp\} = \pi(\mathbb{R}^n \setminus x^\perp), \quad \phi(\pi(x + y)) = y.$$

A une courbe $c :]-1, 1[\rightarrow U$ passant par $\pi(x)$, $c(t) = \pi(x + y(t))$, $y(0) = 0$, on associe $(\phi \circ c)(t) = y(t)$ et le vecteur tangent

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c)(0) = \frac{d}{dt}y(0) \in x^\perp.$$

On a donc identifié $T_{\pi(x)}\mathbb{P}_{n-1}$ et x^\perp . ■

5.2 Le fibré tangent

Le fibré tangent $TM = \cup_{m \in M} T_m M$ est une variété différentiable modélisée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Une carte locale en (m, v) , $v \in T_m M$, est donnée par

$$\theta : T_U M = \cup_{m \in U} T_m M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \theta(m, v) = (\phi(m), \theta_m(v))$$

où (U, ϕ) est une carte locale de M en m et où θ_m est l'isomorphisme défini ci-dessus. En d'autres termes, on repère un élément (m, v) du fibré tangent à l'aide des

coordonnées locales de $m \in M$ et des coordonnées de $v \in T_m M$ décrites à l'aide de l'isomorphisme θ_m .

Par exemple le fibré tangent au cercle \mathbb{S}^1 est le cylindre

$$T\mathbb{S}^1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), \lambda) : 0 \leq \theta < 2\pi, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

L'espace tangent en $(m, 0) \in TM$ s'identifie à un espace produit :

$$T_{(m,0)}TM = T_m M \times T_m M.$$

5.3 Dérivée d'une application

Lorsque f est une application de classe C^1 d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^m , pour tout $x \in U$ et $u \in \mathbb{R}^m$ et pour toute courbe $c :]-1, 1[\rightarrow U$ de classe C^1 telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = u$ on a, par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$Df(x)u = D(f \circ c)(0).$$

Cette dernière expression à un sens même si au lieu de U et \mathbb{R}^m on considère deux variétés différentiables M et N et une application $f : M \rightarrow N$.

Définition 5.3 Si $f : M \rightarrow N$ est une application de classe C^1 , on définit

$$Df : TM \rightarrow TN \text{ par } Df([c]_m) = [f \circ c]_{f(m)}.$$

Df est appelée la "dérivée" de f ou bien l'"application tangente" de f en m ". La dérivée est aussi notée, de façon plus traditionnelle, par

$$Df(m)u = Df([c]_m)$$

lorsque $u = [c]_m$.

Il faut noter que Df est bien définie par le procédé ci-dessus : si au lieu de la courbe c on prend une autre courbe c' avec $[c]_m = [c']_m$ alors $[f \circ c]_{f(m)} = [f \circ c']_{f(m)}$. C'est de plus une application linéaire de $T_m M$ dans $T_{f(m)} N$.

Théorème 5.1 Dérivée des fonctions composées.

1. Si $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ sont de classe C^k alors $g \circ f : M \rightarrow P$ est de classe C^k et

$$D(g \circ f)(m) = Dg(f(m)) \circ Df(m).$$

2. La dérivée en m de id_M est $Did_M(m) = id_{T_m M}$.
3. Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme (f est bijective, f et f^{-1} sont de classe C^k) alors $Df(m) : T_m M \rightarrow T_{f(m)} N$ est bijective et $Df(m)^{-1} = Df^{-1}(f(m))$.

Exemple 5.3 Le cas des sous-variétés. Supposons que M soit une sous-variété de \mathbb{R}^n , que N soit une sous-variété de \mathbb{R}^m et que $f : M \rightarrow N$ soit la restriction à M d'une application $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n contenant M . Pour tout $m \in M$, $Df(m)$ est la restriction de $DF(m)$ à $T_m M$. ■

6. Itérations successives

Notons M une variété différentiable et $f : M \rightarrow M$. Nous souhaitons étudier le comportement des suites définies par récurrence par $x_{k+1} = f(x_k)$ (approximations successives). Une approche classique pour l'étude de ces suites consiste à considérer les sous-ensembles invariants qui leur sont associées. Un tel ensemble X vérifie, par définition, $f(X) \subset X$. Lorsque X est réduit à un seul point, $X = \{x\}$, on dit plutôt que x est un point fixe de f . Il est clair que si une suite des approximations successives converge ($x_k \rightarrow x$) et que si f est continue alors x est un point fixe de f . Dans les lignes qui suivent nous classifions les points fixes vis à vis des propriétés de convergence des suites d'approximations successives.

6.1 Points fixes attractifs, répulsifs, hyperboliques

Définition 6.1 Les itérés de f sont définis par $f^0 = id$ et

1. $f^k = f \circ f^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$,
et, lorsque f est une bijection, par
2. $f^k = f^{-1} \circ f^{k+1}$ pour tout entier $k \leq -1$.

Définition 6.2 Nous dirons qu'un point fixe x de $f : M \rightarrow M$ est attractif si toutes les suites $(x_k) = (f^k(x_0))$ sont définies et convergent vers x lorsque $k \rightarrow \infty$ quel que soit x_0 dans un voisinage de x .

Définition 6.3 Lorsque $f : M \rightarrow M$ est bijective, nous dirons qu'un point fixe x de f est répulsif si toutes les suites $(x_k) = (f^{-k}(x_0))$ sont définies et convergent vers x lorsque $k \rightarrow \infty$ quel que soit x_0 dans un voisinage de x .

Les concepts "attractif" et "répulsif" s'échangent dans le passage de f à f^{-1} : un point fixe attractif pour f^{-1} est répulsif pour f et un point fixe répulsif pour f^{-1} est attractif pour f .

Un exemple élémentaire est donné par $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ définie par $f(x) = x^2$; 0 est un point fixe attractif puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1[$, 1 est un point fixe répulsif puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = 1$ pour tout $x \in [0, \infty[$. On voit donc que toutes les suites $(f^k(x))$ pour $x \neq 1$ "proviennent" de 1 et "se dirigent" vers 0 ou vers ∞ ($\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \infty$ pour tout $x > 1$).

Nous envisageons maintenant une troisième catégorie de points fixes plus générale que les deux premières : les points fixes hyperboliques. Nous commençons par traiter le cas d'une application linéaire sur lequel nous nous appuierons ensuite pour traiter le cas non linéaire.

Définition 6.4 *Nous dirons qu'une application linéaire $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, où \mathbb{E} est un espace de Banach, est hyperbolique si elle est continue et s'il existe une décomposition de \mathbb{E} en somme directe topologique de deux sous-espaces fermés (c'est-à-dire que la somme est directe et que les projecteurs associés sont continus)*

$$\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$$

telle que

1. E_c et E_d soient invariants par L ,
2. $L|_{E_c}$ soit une contraction,
3. $L|_{E_d}$ soit une dilatation.

Notons que les espaces E_c et E_d peuvent être égaux à $\{0\}$. C'est le cas, par exemple, lorsque L est une homothétie : $L(x) = \lambda x$ avec $\lambda > 1$. On a alors $E_c = \{0\}$ et $E_d = \mathbb{E}$.

6.1.1 Les sous-espaces contractés et dilatés

Les sous-espaces E_c et E_d introduits dans la définition 6.4 sont caractérisés par la proposition suivante :

Proposition 6.1 *Soit L un endomorphisme hyperbolique d'un espace de Banach \mathbb{E} et soit $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$ une décomposition de \mathbb{E} associée à L telle qu'en définition 6.4. On a*

1. $E_c = E_c(L)$ où $E_c(L) = \{x \in \mathbb{E} : \lim_{k \rightarrow \infty} L^k(x) = 0\}$,
2. Si $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ est bijective alors, $E_d = E_d(L)$ où $E_d(L) = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{E} : \lim_{k \rightarrow -\infty} \|L^{-k}(x)\| = 0\}$.

$E_c(L)$ et $E_d(L)$ s'appellent les sous-espaces contractés et dilatés associés à L .

Preuve. 1) Par hypothèse il existe $0 < \lambda < 1$ et $\Lambda > 1$ tels que $\|Lx\| \leq \lambda\|x\|$ et $\|Ly\| \geq \Lambda\|y\|$ pour tout $x \in E_c$ et $y \in E_d$. Si $x \in E_c$ on a

$$\|L^k x\| \leq \lambda^k \|x\| \rightarrow 0$$

lorsque $k \rightarrow \infty$ de sorte que $x \in E_c(L)$. Réciproquement, soit $x \in E_c(L)$. Ecrivons

$$x = x_c + x_d \in E_c \oplus E_d.$$

On a

$$x - x_c = x_d \in E_c(L) \cap E_d$$

de sorte que $x_d = 0$ et que $x = x_c \in E_c$.

2) La seconde assertion se prouve par échange des rôles de L et L^{-1} . ■

Dans le cas non-linéaire on introduit la définition suivante :

Définition 6.5 Soit $f : M \rightarrow M$ de classe C^1 . Nous dirons qu'un point fixe x de f est hyperbolique lorsque la dérivée $Df(x)$ de f en x est un endomorphisme hyperbolique de l'espace tangent $T_x M$.

6.1.2 Exemple : les endomorphismes diagonalisables

Soit \mathbb{E} un espace vectoriel de dimension finie et soit $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ un endomorphisme diagonalisable de \mathbb{E} . Il existe une base e_1, \dots, e_n de \mathbb{E} et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$L(e_i) = \lambda_i e_i$$

pour tout i .

- Cette application est contractante si $|\lambda_i| < 1$ pour tout i . Dans ce cas

$$\|L(x) - L(y)\| \leq (\max |\lambda_i|) \|x - y\|.$$

- Elle est dilatante si $|\lambda_i| > 1$ pour tout i . On a alors

$$\|L(x) - L(y)\| \geq (\min |\lambda_i|) \|x - y\|.$$

- Elle est hyperbolique si $|\lambda_i| \neq 1$ pour tout i . Dans ce cas

$$\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$$

où E_c (resp. E_d) est engendré par les vecteurs e_i avec $|\lambda_i| < 1$ (resp. $|\lambda_i| > 1$).

- Elle n'est pas hyperbolique s'il existe i avec $|\lambda_i| = 1$. Raisonnons par l'absurde : si $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$ et si L est une contraction sur E_c et une dilatation sur E_d écrivons $e_i = e_c + e_d \in E_c \oplus E_d$. On a $L^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ donc $\|L^k(e_i)\| = \|e_i\| \neq 0$ pour tout k . D'autre part

$$L^k(e_i) = L^k(e_c) + L^k(e_d).$$

Si $e_d \neq 0$ alors

$$\lim \|L^k(e_i)\| = \lim \|L^k(e_d)\| = \infty$$

et si $e_d = 0$ alors

$$\lim \|L^k(e_i)\| = \lim \|L^k(e_c)\| = 0$$

ce qui, dans ces deux cas, contredit $\lim \|L^k(e_i)\| = \|e_i\| \neq 0$.

6.1.3 Exemple : les endomorphismes du plan.

Soit L un endomorphisme du plan \mathbb{R}^2 . A quelle condition 0 est-il un point fixe attractif, répulsif, hyperbolique? Nous allons déjà rencontrer des situations très générales. Commençons par un théorème de structure pour ces endomorphismes.

Théorème 6.1 *Il existe une base de \mathbb{R}^2 dans laquelle la matrice J de L ait l'une des formes suivantes :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou bien } \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

pour des nombres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$.

Preuve. Considérons les deux valeurs propres de L . Si elles sont réelles et distinctes on peut diagonaliser L et on obtient le premier cas. Si elles sont réelles et égales on obtient le premier cas si le sous-espace propre associé est de dimension 2 et le second cas si ce sous-espace propre est de dimension 1. Si les deux valeurs propres de L sont complexes conjuguées $\rho \exp(\pm i\theta)$, $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, il existe deux vecteurs propres complexes conjugués $x \pm iy$, où les vecteurs x et y sont réels et indépendants. Dans la base $\{x, y\}$ on obtient le troisième cas. ■

En vertu de ce théorème, il existe une matrice inversible P telle que L (identifié à sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2) s'écrive $L = PJP^{-1}$. La suite des itérés ($L^k(x)$) est donnée par $L^k(x) = PJ^kP^{-1}x$ ce qui ramène notre étude, via le changement de variable $x = Py$, aux suites $(J^k y)$, $y \in \mathbb{R}^2$.

Premier cas. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ on a $J^k y = \begin{pmatrix} \lambda^k y_1 \\ \mu^k y_2 \end{pmatrix}$ ce qui fait de l'origine un point fixe attractif si $|\lambda|$ et $|\mu| < 1$, répulsif si $|\lambda|$ et $|\mu| > 1$ et hyperbolique si $|\lambda| > 1$ et $|\mu| < 1$ ou bien si $|\lambda| < 1$ et $|\mu| > 1$.

Deuxième cas. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ on a $J^k y = \begin{pmatrix} \lambda^k y_1 + k\lambda^{k-1} y_2 \\ \lambda^k y_2 \end{pmatrix}$ ce qui fait de l'origine un point fixe attractif si $|\lambda| < 1$ et répulsif si $|\lambda| > 1$.

Troisième cas. Les matrices J suivantes correspondent aux deux premiers cas avec des coefficients λ et μ pouvant être de valeur absolue égale à 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous laissons étudier au lecteur, à titre d'exercice, les suites $(J^k y)$ qui leurs sont associées. Ce sont des cas de non hyperbolicité.

Quatrième cas. $J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^2$ on a

$$J^k y = \rho^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} y$$

ce qui fait de l'origine un point fixe attractif si $\rho < 1$ et répulsif si $\rho > 1$.

Cinquième cas. $J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. C'est une rotation d'angle θ autour de l'origine. La suite des itérés $(J^k y)$ reste enfermée dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\|y\|$. Cette suite est périodique si θ est un multiple rationnel de π , elle est dense dans ce cercle sinon. C'est un cas de non hyperbolicité.

6.2 Endomorphismes contractants, dilatants ou hyperboliques

L'exemple des endomorphismes du plan ainsi que celui des endomorphismes diagonalisables montrent que les propriétés "contractant", "dilatant" et "hyperbolique" se lisent sur le spectre de cet endomorphisme : L est contractant si ses valeurs propres sont à l'intérieur du disque unité, dilatant si elles sont à l'extérieur de ce disque et hyperbolique si aucune des valeurs propres n'est située sur ce disque.

Cela est-il encore vrai pour un endomorphisme continu L d'un espace de Banach réel \mathbb{E} ? Nous allons voir que la réponse est "oui" pour les propriétés "contractant" et "dilatant". La réponse est encore "oui" dans le cas hyperbolique à condition de supposer que \mathbb{E} soit de dimension finie.

Pour démontrer ces résultats nous devons utiliser le concept de spectre d'un opérateur linéaire continu d'un espace de Banach dont nous allons décrire les aspects les plus élémentaires. Nous renvoyons le lecteur, pour une étude plus complète, vers les ouvrages suivants : Bollobas [3], Dieudonné [9] et Yosida [21].

6.2.1 Spectre d'un opérateur

Soit \mathbb{F} un espace de Banach complexe et soit $M : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ une application linéaire continue. Un nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ est une *valeur régulière* de M si $M - \zeta \text{id}$ possède un inverse $(M - \zeta \text{id})^{-1}$. Un tel inverse est nécessairement continu en vertu du Théorème de l'inverse continu (théorème 2.2). Les nombres complexes qui ne sont pas des valeurs régulières sont des *valeurs spectrales* de M et leur ensemble est noté

$$\text{Spec}(M).$$

Lorsque $\zeta \in \text{Spec}(M)$ et que $\text{Ker}(M - \zeta \text{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ on dit que ζ est une *valeur propre* de M . On a alors $Mu = \zeta u$ pour un vecteur $u \neq 0$. Un tel vecteur est un *vecteur propre* associé à ζ . Mais une valeur spectrale n'est pas nécessairement une valeur propre sauf lorsque M est de dimension finie. Dans ce cas les valeurs spectrales (propres) sont les racines du *polynôme caractéristique*

$$P_M(z) = \det(M - z \text{id}).$$

6.2.2 Rayon spectral

Le spectre de M est un ensemble non vide et compact dans \mathbb{C} . Pour cette raison on définit le *rayon spectral* de M par

$$\rho(M) = \max_{\zeta \in \text{Spec}(M)} |\zeta|.$$

Le rayon spectral possède plusieurs propriétés que nous utiliserons par la suite :

- Théorème 6.2** 1. $\rho(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} n(M^k)^{1/k}$ où n est n'importe quelle norme sur \mathbb{F} équivalente à la norme de \mathbb{F} (n désigne à la fois une norme sur \mathbb{F} et la norme d'opérateur associée).
2. Pour tout entier $p \geq 0$, $\rho(M^p) = \rho(M)^p$.
3. $\rho(M) = \inf n(M)$ où l'infimum est pris pour toutes les normes n équivalentes à la norme de \mathbb{F} .

Preuve. Notons $\|\cdot\|$ la norme de \mathbb{F} et n une norme équivalente. L'égalité $\rho(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|^{1/k}$ est prouvée par Yosida [21], Chapitre VIII-2, Théorèmes 3 et 4. Pour passer à une norme équivalente, on note que si

$$\alpha \|x\| \leq n(x) \leq \beta \|x\|$$

pour tout $x \in \mathbb{F}$ alors

$$\frac{\alpha}{\beta} \|u\| \leq n(u) \leq \frac{\beta}{\alpha} \|u\|$$

pour tout endomorphisme continu u de \mathbb{F} . Ainsi

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/k} \|M^k\|^{1/k} \leq n(M^k)^{1/k} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/k} \|M^k\|^{1/k}$$

ce qui prouve que $\lim_k \|M^k\|^{1/k} = \lim_k n(M^k)^{1/k}$.

La seconde assertion utilise la première :

$$\rho(M^p) = \lim_k \|M^{pk}\|^{1/k} = \left(\lim_k \|M^{pk}\|^{1/pk}\right)^p = \rho(M)^p.$$

Prouvons la troisième assertion. Comme $n(M^k) \leq n(M)^k$ on obtient

$$n(M^k)^{1/k} \leq n(M)$$

pour tout $k > 0$ d'où

$$\rho(M) \leq \inf_n n(M).$$

Pour prouver que cet infimum est égal à $\rho(M)$ on se donne un réel $\alpha > \rho(M)$ et on construit une norme n équivalente à $\|\cdot\|$ telle que

$$n(M) \leq \alpha.$$

Par la première assertion, il existe $p > 0$ tel que $\|M^p\|^{1/p} < \alpha$. On a

$$\|M^p x\| < \alpha^p \|x\|$$

pour tout $x \in \mathbb{F}$. Posons

$$n(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{p-i-1} \|M^i x\|.$$

C'est une norme sur \mathbb{F} équivalente à $\|\cdot\|$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{F}$,

$$n(Mx) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{p-i-1} \|M^{i+1}x\| = \alpha n(x) + \|Mx\| - \alpha^p \|x\| \leq \alpha n(x).$$

Ainsi $n(M) \leq \alpha$. ■

6.2.3 Spectre d'un endomorphisme réel

Donnons nous maintenant une application linéaire et continue $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ où \mathbb{E} est un espace de Banach réel. A cet espace nous associons son complexifié

$$\mathbb{F} = \mathbb{E} \oplus i\mathbb{E}.$$

C'est un espace vectoriel complexe pour l'addition

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

et la multiplication externe

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$$

où x, x', y et $y' \in \mathbb{E}$, α et $\beta \in \mathbb{R}$. \mathbb{F} est un espace de Banach complexe pour la norme

$$\|x + iy\|_{\mathbb{F}} = (\|x\|_{\mathbb{E}}^2 + \|y\|_{\mathbb{E}}^2)^{1/2}.$$

Notons omettrons désormais les indices \mathbb{E} et \mathbb{F} dans l'écriture de ces normes. Le prolongement de L à \mathbb{F} tout entier est défini par

$$M : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, \quad M(x + iy) = L(x) + iL(y).$$

Notons que $M(x) = L(x)$ pour tout $x \in \mathbb{E}$ et que

$$\|M\| = \|L\|.$$

Le spectre de L est défini par

$$\text{Spec}(L) = \text{Spec}(M)$$

et le rayon spectral de L par

$$\rho(L) = \rho(M).$$

Les propriétés suivantes se déduisent facilement du théorème 6.2 :

Théorème 6.3 1. $\rho(L) = \lim_{k \rightarrow \infty} n(L^k)^{1/k}$ où n est n'importe quelle norme sur \mathbb{E} équivalente à la norme de \mathbb{E} .

2. $\rho(L^p) = \rho(L)^p$ pour tout entier $p \geq 0$.

3. $\rho(L) = \inf n(L)$ où l'infimum est pris pour toutes les normes n équivalentes à la norme de \mathbb{E} .

6.2.4 Endomorphismes contractants.

Les endomorphismes contractants sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème 6.4 Pour un endomorphisme continu L d'un espace de Banach \mathbb{E} il y a équivalence entre

1. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} L^k(x) = 0$,

2. $\rho(L) < 1$,

3. Il existe une norme n sur \mathbb{E} équivalente à la norme de \mathbb{E} et un scalaire λ , $0 \leq \lambda < 1$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on ait $n(Lx) \leq \lambda n(x)$.

Preuve. 1 \Rightarrow 2. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} L^k(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{E}$, par le Théorème de Banach-Steinhaus, la convergence est uniforme en x et $\lim_{k \rightarrow \infty} \|L^k\| = 0$. On peut donc supposer que $\|L^k\| < 1$ pour un entier k assez grand. Par le théorème 6.3 on obtient

$$\rho(L) = \rho(L^k)^{1/k} \leq \|L^k\|^{1/k} < 1.$$

2 \Rightarrow 3. Soit λ tel que $\rho(L) < \lambda < 1$. Par le théorème 6.3 il existe une norme n sur \mathbb{E} équivalente à la norme de \mathbb{E} telle que

$$\rho(L) \leq n(L) < \lambda < 1$$

d'où

$$n(Lx) \leq \lambda n(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{E}$.

3 \Rightarrow 1. On a $n(L^k x) \leq \lambda^k n(x) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. ■

6.2.5 Endomorphismes dilatants

Les endomorphismes dilatants sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème 6.5 Pour un endomorphisme bijectif et continu L d'un espace de Banach \mathbb{E} il y a équivalence entre

1. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} L^{-k}(x) = 0$,

2. Il existe $\Lambda > 1$ tel que $|\lambda| \geq \Lambda$ pour toute valeur spectrale $\lambda \in \text{Spec}(L)$,
3. Il existe une norme n sur \mathbb{E} équivalente à la norme de \mathbb{E} et un scalaire $\Lambda > 1$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{E}$, on ait $n(Lx) \geq \Lambda n(x)$.

Sous ces conditions, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|L^k x\| = \infty$ pour tout $x \neq 0$.

Preuve. L'équivalence de ces énoncés est une conséquence du théorème 6.4 appliqué à L^{-1} et de l'équivalence entre $\lambda \in \text{Spec}(L)$ et $\lambda^{-1} \in \text{Spec}(L^{-1})$. ■

Corollaire 6.1 *Pour un endomorphisme L d'un espace vectoriel de dimension finie \mathbb{E} il y a équivalence entre*

1. L est bijectif et, pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} L^{-k}(x) = 0$,
2. Il existe $\Lambda > 1$ tel que $|\lambda| \geq \Lambda$ pour tout valeur propre λ de L ,
3. Il existe une norme n sur \mathbb{E} et un scalaire $\Lambda > 1$, tels que $n(Lx) \geq \Lambda n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{E}$
4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|L^k x\| = \infty$ pour tout $x \neq 0$.

Preuve. Les assertions 1, 2 et 3 sont équivalentes par le théorème 6.5 et parce que les conditions 2 et 3 impliquent l'inversibilité de L . Montrons que $3 \Rightarrow 4$ (facile) et que $4 \Rightarrow 2$. Raisonnons par l'absurde. S'il existe $\lambda \in \text{Spec}(L)$ avec $|\lambda| \leq 1$, prenons un vecteur propre $u = x + iy$ de l'application M qui prolonge L sur le complexifié de \mathbb{E} . On a $M^k u = L^k x + iL^k y$ et

$$\|L^k x\| \text{ et } \|L^k y\| \leq \|M^k u\| = |\lambda|^k \|u\| \leq \|u\|.$$

Comme u est un vecteur propre, x ou $y \neq 0$ et cela contredit 4. ■

6.2.6 Endomorphismes hyperboliques

Passons au cas hyperbolique qui est beaucoup plus compliqué à étudier.

Théorème 6.6 *Soit \mathbb{E} un espace vectoriel normé réel de dimension finie. Un endomorphisme L de \mathbb{E} est hyperbolique si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module $\neq 1$.*

Preuve. Pour montrer que cette condition est nécessaire on raisonne par l'absurde : supposons que L soit hyperbolique, que $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$ comme dans la définition 6.4 et qu'une valeur propre λ de L soit de module 1. Notons $M : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ les complexifiés de L et \mathbb{E} (paragraphe 6.2.3). Il existe

$$u = x + iy \in \mathbb{F}, \quad u \neq 0,$$

avec $Mu = \lambda u$. Comme $M^k u = \lambda^k u$ et que $M^k u = L^k x + iL^k y$ on obtient

$$\|M^k u\|^2 = \|L^k x\|^2 + \|L^k y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0.$$

Les vecteurs x et y sont eux-mêmes décomposés en $x = x_c + x_d$ et $y = y_c + y_d \in \mathbb{E}_c \oplus \mathbb{E}_d$ d'où

$$\|L^k x_c + L^k x_d\|^2 + \|L^k y_c + L^k y_d\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0.$$

Comme les suites $(L^k x_c)$ et $(L^k y_c)$ ont pour limite 0 on obtient

$$\lim_k \|L^k x_d\|^2 + \|L^k y_d\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0,$$

mais d'après le corollaire 6.1 une telle limite ne peut valoir que 0 ou ∞ : contradiction!

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Notons

$$C = \{\lambda \in \text{Spec}(L) : |\lambda| < 1\} \text{ et } D = \{\lambda \in \text{Spec}(L) : |\lambda| > 1\}$$

de sorte que

$$\text{Spec}(L) = D \cup C.$$

Notons $n = \dim \mathbb{E}$ et considérons les polynômes

$$P_D(z) = \prod_{\lambda \in D} (z - \lambda)^n \text{ et } P_C(z) = \prod_{\lambda \in C} (z - \lambda)^n.$$

Ce sont des polynômes réels parce que C et D sont invariants par conjugaison complexe. Les polynômes d'endomorphisme associés sont

$$P_D(L) = \prod_{\lambda \in D} (L - \lambda \text{id})^n \text{ et } P_C(L) = \prod_{\lambda \in C} (L - \lambda \text{id})^n$$

dont les noyaux sont notés

$$E_c = \text{Ker } P_C(L) \text{ et } E_d = \text{Ker } P_D(L).$$

Nous allons prouver que $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$, que E_c et E_d sont invariants par L , que $L|_{E_c}$ est une contraction et que $L|_{E_d}$ est une dilatation. Ainsi L sera hyperbolique.

1. $L(E_c) \subset E_c$ et $L(E_d) \subset E_d$. Soit $x \in E_c$ de sorte que $P_C(L)x = 0$. On a

$$P_C(L)(L(x)) = (P_C(L) \circ L)(x) = (L \circ P_C(L))(x) = 0$$

et donc $L(x) \in E_c$. Idem pour E_d .

2. $L|_{E_c}$ est une contraction. Soit λ une valeur propre de $L|_{E_c}$. On a

$$P_C(\lambda) \in P_C(\text{Spec}(L|_{E_c})) = \text{Spec}(P_C(L|_{E_c})) = 0$$

puisque $P_C(L|_{E_c}) = 0$. Ceci prouve que $\lambda \in C$ et donc que $|\lambda| < 1$. Par le théorème 6.4 $L|_{E_c}$ est une contraction. L'égalité

$$P_C(\text{Spec}(v)) = \text{Spec}(P_C(v))$$

utilisée ci-dessus est vraie pour tout polynôme P et pour tout endomorphisme v de \mathbb{E} . Il suffit de le prouver pour une matrice $n \times n$ complexe A . On écrit $A = BTB^{-1}$ avec T triangulaire supérieure de sorte que

$$\text{Spec}(A) = \text{Spec}(T) = \{t_{ii} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Comme $P(A) = BP(T)B^{-1}$ on obtient

$$\text{Spec}(P(A)) = \text{Spec}(P(T)) = \{P(t_{ii}) : 1 \leq i \leq n\} = P(\text{Spec}(A)).$$

Par un argument similaire on montre que

3. $L|_{E_d}$ est une dilatation.
4. $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$. Comme les polynômes $P_C(z)$ et $P_D(z)$ n'ont pas de racine commune, ils sont premiers entre-eux et, par le théorème de Bézout, il existe deux polynômes réels $A(z)$ et $B(z)$ tels que

$$A(z)P_C(z) + B(z)P_D(z) = 1.$$

Les polynômes d'endomorphismes correspondant vérifient

$$A(L)P_C(L) + B(L)P_D(L) = \text{id}$$

de sorte que

$$A(L)P_C(L)x + B(L)P_D(L)x = x$$

pour tout $x \in \mathbb{E}$. Cette identité prouve que $E_c \cap E_d = \{0\}$. Montrons maintenant que $A(L)P_C(L)x \in E_d$ et que $B(L)P_D(L)x \in E_c$ ce qui prouvera que $\mathbb{E} = E_c \oplus E_d$. Le polynôme

$$P_C(z)P_D(z) = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(L)} (z - \lambda)^n$$

est un multiple du polynôme caractéristique de L

$$P_L(z) = \prod_{\lambda \in \text{Spec}(L)} (z - \lambda)^{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda) \leq n$ est la multiplicité de la valeur propre λ . Par la Théorème de Cayley-Hamilton, $P_L(L) = 0$ et donc $P_C(L)P_D(L) = 0$. On en déduit que

$$P_D(L) (A(L)P_C(L)x) = P_C(L)P_D(L) (A(L)x) = 0$$

c'est à dire que $A(L)P_C(L)x \in E_d$. De la même manière

$$P_C(L) (B(L)P_D(L)x) = P_C(L)P_D(L) (B(L)x) = 0$$

et donc $B(L)P_D(L)x \in E_c$, ce qui termine cette démonstration.

6.3 Le cas non linéaire : le théorème de Grobman-Hartman.

Soit \mathbb{E} un espace de Banach. Lorsque $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ n'est plus un opérateur linéaire la situation est-elle différente? Nous allons voir que l'on a une bonne théorie de la linéarisation, qui permet de déduire la structure d'un point fixe hyperbolique x de f des propriétés de la dérivée $Df(x)$. Ceci se fait au travers du théorème de Grobman-Hartman qui permet de passer de f à $Df(x)$ par un changement de variable h bijectif et bicontinu.

Théorème 6.7 (*Grobman-Hartman*) *Soit f un difféomorphisme de classe C^1 défini sur un ouvert U de \mathbb{E} et soit x un point fixe hyperbolique de f dans U . Il existe un homéomorphisme h d'un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{E} sur un voisinage ouvert de x dans U tel que $f = h \circ Df(x) \circ h^{-1}$. On dit alors que f et $Df(x)$ sont topologiquement conjugués.*

Il n'est pas toujours possible pour h d'être de classe C^1 . Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces questions à Demazure [8] ou à Hartman [11].

Quel est le comportement de la suite des itérés $x_k = f^k(x_0)$ où x_0 est pris dans un voisinage du point fixe x ? Par le changement de variable $x = h(y)$ on se ramène à la suite $y_k = Df(x)^k y_0$, c'est-à-dire au cas linéaire. On peut alors utiliser les théorèmes 6.4 et 6.5 qui donnent les deux théorèmes suivants :

Théorème 6.8 *Soit f un difféomorphisme de classe C^1 défini sur un ouvert U de \mathbb{E} et soit x un point fixe hyperbolique de f dans U . Il y a équivalence entre :*

1. x est un point fixe attractif,
2. Le rayon spectral de $Df(x)$ vérifie $\rho(Df(x)) < 1$,
3. Il existe une distance définie sur un voisinage de x pour laquelle f est une contraction.

Preuve. L'équivalence des deux premiers énoncés vient d'être justifiée et le théorème des approximations successives prouve que l'existence d'une distance pour laquelle f est une contraction fait de x un point fixe attractif. La construction de la distance d utilise la norme n du théorème 6.4 ainsi que le changement de variable h du Théorème de Grobman-Hartman : on pose $d(u, v) = n(h^{-1}(u) - h^{-1}(v))$. Ainsi

$$d(f(y), f(z)) = n(Df(x)(h^{-1}(y)) - Df(x)(h^{-1}(z))) \leq \lambda n(h^{-1}(y) - h^{-1}(z)) = \lambda d(y, z)$$

dans le cas contractant. ■

Théorème 6.9 *Soit f un difféomorphisme de classe C^1 défini sur un ouvert U de \mathbb{E} et soit x un point fixe hyperbolique de f dans U . Il y a équivalence entre :*

1. x est un point fixe répulsif,
2. Pour tout $\lambda \in \text{Spec}(Df(x))$, on a $|\lambda| > 1$,

3. Il existe une distance définie sur un voisinage de x pour laquelle f est une dilatation.

Preuve. On procède comme pour le théorème précédent en utilisant le Théorème de Grobman-Hartman et le théorème 6.5. ■

6.4 Points fixes hyperboliques sur les variétés

On passe du cas des espaces de Banach à celui des variétés différentiables en utilisant une carte locale. A partir des théorèmes 6.6, 6.8 et 6.9 on obtient facilement les trois énoncés suivants :

Théorème 6.10 Soit \mathbb{E} un espace vectoriel normé réel de dimension finie. Un endomorphisme L de \mathbb{E} est hyperbolique si et seulement si toutes ses valeurs propres sont de module $\neq 1$.

Théorème 6.11 Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 et soit x un point fixe hyperbolique de f . Il y a équivalence entre :

1. x est un point fixe attractif,
2. Le rayon spectral de $Df(x)$ vérifie $\rho(Df(x)) < 1$,
3. Il existe une distance définie sur un voisinage de x pour laquelle f est une contraction.

Théorème 6.12 Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 et soit x un point fixe hyperbolique de f . Il y a équivalence entre :

1. x est un point fixe répulsif,
2. Pour tout $\lambda \in \text{Spec}(Df(x))$, on a $|\lambda| > 1$,
3. Il existe une distance définie sur un voisinage de x pour laquelle f est une dilatation.

6.5 Exemple : valeurs propres et méthode de la puissance.

Nous allons étudier la méthode de la puissance pour le calcul de la valeur propre dominante d'une matrice. Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes inversible. La méthode de la puissance consiste à calculer la suite des itérés $x_k = A^k x$ où x est un vecteur non nul dans \mathbb{C}^n . A cette suite on associe une suite de droites vectorielles qui sont $\overline{x_k} = \mathbb{C}x_k$ et on constate que, en général, cette suite de droites converge vers la direction propre correspondant à la valeur propre de A de plus grand module. Une fois calculée cette direction propre il est facile d'en déduire la valeur propre correspondante.

Nous avons déjà rencontré l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ (voir Exemple 4.3.3) qui est l'ensemble des droites vectorielles (privées de l'origine) contenues dans \mathbb{C}^n . C'est une variété différentiable analytique compacte.

Nous définissons une structure métrique sur $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ de la façon suivante. Notons

$$\bar{x} = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0\}$$

la droite vectorielle issue de $x \neq 0$.

Définition 6.6 Pour \bar{x} et $\bar{y} \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ on pose

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{\|x - \lambda y\|}{\|x\|}.$$

Cette définition est consistante : si l'on change x et y par des multiples scalaires la valeur du minimum reste inchangée.

Proposition 6.2 Les propriétés de d sont les suivantes :

1. $d(\bar{x}, \bar{y}) = \left(1 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}\right)^{1/2}$,
2. $0 \leq d(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1$,
3. $d(\bar{x}, \bar{y}) = 1$ si et seulement si les droites \bar{x} et \bar{y} sont orthogonales,
4. d est une distance.
5. La topologie définie par la distance d est identique à la topologie quotient de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Preuve. La première propriété provient du fait que le minimum, dans la définition de d est égal à la distance de x à sa projection orthogonale sur la droite \bar{y} c'est-à-dire $\|x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y\|$. Les seconde et troisième propriétés sont évidentes. Pour prouver que d est une distance la seule difficulté est d'établir l'inégalité du triangle : $d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{z})$ où x, y et z sont trois vecteurs non nuls que l'on peut supposer de norme 1. Par une transformation unitaire on se ramène au cas de trois points pris sur sur sphère unité de \mathbb{R}^3 . Puisque $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{-y})$ on peut toujours supposer que nos trois points sont dans une même hémisphère et enfin supposer que leurs coordonnées sont $x = (\cos a, 0, \sin a)$, $y = (0, 0, 1)$, $z = (\cos b \cos c, \cos b \sin c, \sin b)$ et que $0 \leq a, b \leq \pi/2$. Il faut alors prouver que

$$\sqrt{1 - (\cos a \cos b \cos c + \sin a \sin b)^2} \leq \cos a + \cos b.$$

Comme la plus grande valeur possible pour la racine carrée est obtenue lorsque $\cos c = \pm 1$ il suffit de prouver que

$$1 - \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \pm 2 \cos a \cos b \sin a \sin b \leq \cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b.$$

On prouve cette dernière inégalité en la scindant en

$$\begin{aligned} \pm \cos a \cos b \sin a \sin b &\leq \cos a \cos b \quad \text{et} \\ 1 - \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b &\leq \cos^2 a + \cos^2 b. \end{aligned}$$

Pour prouver la dernière assertion il faut tout d'abord se souvenir que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ est le quotient de la sphère \mathbb{S}^{2n-1} (sphère unité dans \mathbb{C}^n) par la relation d'équivalence $x \equiv y$ si et seulement si $x = \lambda y$ pour un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Cette sphère est équipée de la distance $D(x, y) = \|x - y\|$ grâce à laquelle on peut définir sa topologie. La topologie quotient est donnée par la distance quotient

$$\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{|\alpha|=|\beta|=1} D(\alpha x, \beta y)$$

qui est la distance entre deux classes d'équivalence. Il est facile de voir que $\bar{D} = d$ d'où l'assertion. ■

Définition 6.7 Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes inversible. On définit

$$\bar{A} : \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \quad \text{par} \quad \bar{A}\bar{x} = \overline{Ax}.$$

Cette définition a un sens pour deux raisons. La première est que l'image d'une droite par une application linéaire inversible est une droite. Si l'on voulait considérer des applications non inversibles il faudrait restreindre \bar{A} à une partie de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. La seconde raison est que \overline{Ax} ne dépend pas de x mais bien de \bar{x} . La proposition suivante est évidente :

Proposition 6.3 Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes inversible. Il est équivalent de dire :

1. x est un vecteur propre de A ,
2. \bar{x} est un point fixe de \bar{A} .

Nous allons calculer ces points fixes, c'est-à-dire les vecteurs propres de A , en utilisant la méthode des approximations successives.

Théorème 6.13 Supposons que A ait ses valeurs propres de modules distincts. Notons les par module décroissant

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

et soit v_1, v_2, \dots, v_n une base de vecteurs propres. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, la suite des itérés $\bar{x}_k = \bar{A}^k \bar{x}$ converge vers un point fixe de \bar{A} c'est-à-dire une direction propre de A . Le bassin d'attraction de \bar{v}_i pour \bar{A} (respectivement, pour $(\bar{A})^{-1}$) est l'ensemble des

$$x = \sum_{k=i}^n \alpha_k v_k \quad (\text{respectivement, } x = \sum_{k=1}^i \alpha_k v_k)$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $\alpha_i \neq 0$ et \bar{A} (respectivement, $(\bar{A})^{-1}$) laisse cet ensemble invariant. Le bassin d'attraction de \bar{v}_1 est un ouvert dense.

Preuve. Soit $\bar{x} \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Il existe i , $1 \leq i \leq n$, pour lequel

$$x = \alpha_i v_i + \dots + \alpha_n v_n$$

avec $\alpha_i \neq 0$. On a

$$A^k x = \lambda_i^k \alpha_i v_i + \dots + \lambda_n^k \alpha_n v_n = \lambda_i^k \alpha_i \left(v_i + \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)^k \frac{\alpha_j}{\alpha_i} v_j \right) = \lambda_i^k \alpha_i (v_i + w_k)$$

et $w_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$d(A^k x, v_i) = d(\lambda_i^k \alpha_i (v_i + w_k), v_i) = d(v_i + w_k, v_i) \rightarrow d(v_i, v_i) = 0$$

lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi \bar{x} est dans le bassin d'attraction de \bar{v}_i et $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ est l'union disjointe des différents bassins. Il est clair que ces bassins sont invariants par \bar{A} . La propriété relative à $(\bar{A})^{-1}$ se prouve en transposant les rôles de A et de A^{-1} .

Montrons enfin que le bassin d'attraction de \bar{v}_1 est un ouvert dense. Ce bassin est l'image par la surjection canonique $x \in \mathbb{C}^n \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ de l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{C}^n$ qui s'écrivent $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ avec $\alpha_1 \neq 0$. Cet ensemble est ouvert et dense dans \mathbb{C}^n donc aussi son image. ■

Le théorème suivant décrit la nature des points fixes de \bar{A} : \bar{v}_1 est attractif, \bar{v}_n est répulsif et les autres sont hyperboliques. C'est une conséquence du résultat suivant et des théorèmes 6.11, 6.12 et 6.10.

Théorème 6.14 *Supposons que A ait ses valeurs propres de modules distincts. Notons les par module décroissant*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

et soit v_1, v_2, \dots, v_n une base de vecteurs propres. Les valeurs propres de $D\bar{A}(\bar{v}_i)$ sont λ_j/λ_i , $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

Démonstration. Pour simplifier les notations on va supposer que $i = 1$. On va aussi supposer que $v_1 = e_1$ le premier vecteur de base de sorte que $a_{11} = \lambda_1$ et que $a_{j1} = 0$ pour tout $j > 1$. Il suffit pour cela d'introduire une transformation inversible P telle que $Pv_1 = e_1$ et de remplacer A par $A' = PAP^{-1}$. On note alors que les valeurs propres de $D\bar{A}(v_1)$ et de $D\bar{A}'(e_1)$ sont les mêmes. L'étape suivante consiste à introduire une carte locale de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ en \bar{v}_1 . Comme dans l'exemple 4.3.3 on introduit

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) : x_1 \neq 0\}$$

ainsi que

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}, \quad \Phi(\bar{x}) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right).$$

Comme $\bar{A}(\bar{v}_1) = \bar{v}_1$ il existe un ouvert $U_1 \subset U$ dont l'image par \bar{A} est dans U . On pose alors

$$B : \Phi(U_1) \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}, \quad B = \Phi \circ \bar{A} \circ \Phi^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 U_1 & \xrightarrow{\bar{A}} & U \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\
 \Phi(U_1) \subset \mathbb{C}^{n-1} & \xrightarrow{B} & \mathbb{C}^{n-1}
 \end{array}$$

Par le théorème de dérivation des fonctions composées on a : $\bar{A}(\bar{v}_1) = \bar{v}_1$, $\Phi(\bar{v}_1) = 0$, $B(0) = 0$ et

$$DB(0) = D\Phi(\bar{v}_1)D\bar{A}(v_1)D\Phi(\bar{v}_1)^{-1}$$

de sorte que les spectres de $DB(0)$ et de $D\bar{A}(v_1)$ sont les mêmes. Il nous reste à calculer B ainsi que les valeurs propres de $DB(0)$. On a

$$B(x_2, \dots, x_n) = \frac{A(1, x_2, \dots, x_n)}{a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_k}(x_2, \dots, x_n) = \frac{a_{ik}(a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j) - (a_{i1} + \sum_{j=2}^n a_{ij}x_j)a_{1k}}{(a_{11} + \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j)^2}.$$

Ainsi, lorsque $x_2 = \dots = x_n = 0$, puisque $a_{11} = \lambda_1$ et que $a_{j1} = 0$ si $j > 1$ on obtient

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_k}(0) = \frac{a_{ik}}{\lambda_1}$$

de sorte que les valeurs propres de $DB(0)$ sont λ_j/λ_1 . ■

Corollaire 6.2 *Le rayon spectral de $D\bar{A}(\bar{v}_1)$ est $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$, celui de $D\bar{A}(\bar{v}_n)^{-1}$ est $\left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right| < 1$. Les valeurs propres de $D\bar{A}(\bar{v}_i)$ vérifient*

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right| > \dots > \left| \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right| > 1 > \left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right| > \dots > \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right| > 0.$$

L'implémentation de cette méthode se réalise dans \mathbb{C}^n . Pour éviter overflow ou underflow on normalise les vecteurs à chaque étape ce qui conduit à poser

$$x_{k+1} = \frac{Ax_k}{\|Ax_k\|}, \quad x_0 = x$$

où $x \in \mathbb{C}^n$ est donné. Cette suite converge, pour presque tout x , vers le vecteur propre v_1 . La vitesse de convergence est linéaire et mesurée par le rapport $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$. Attention! La convergence a lieu dans $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ et pas nécessairement dans \mathbb{C}^n . Toutefois, dans le cas réel, normaliser Ax_k revient à choisir entre deux points antipodaux pris sur une sphère et l'on peut récupérer la convergence dans \mathbb{R}^n de la suite (x_k) en contrôlant les signes des coordonnées.

6.6 Exemple : la méthode QR

Donnons nous une matrice A , $n \times n$, réelle ou complexe, inversible. Dans cet exposé nous allons analyser un algorithme de calcul des valeurs propres d'une matrice A : la méthode QR.

Dans ce qui suit nous notons \mathbb{H}_n^+ l'ensemble des matrices définies positives, \mathbb{R}_n le groupe des matrices inversibles et triangulaires supérieures, \mathbb{R}_n^+ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale positive, \mathbb{U}_n le groupe unitaire, \mathbb{T}_n le groupe des matrices unitaires et diagonales (leurs termes diagonaux sont 1 ou -1 dans le cas réel et des nombres complexes de module 1 dans le cas complexe).

6.6.1 Les décompositions QR et de Choleski.

Définition 6.8 On appelle décomposition QR de A une identité $A = QR$ avec Q orthogonale dans le cas réel, unitaire dans le cas complexe et R triangulaire supérieure et inversible.

Proposition 6.4 Toute matrice A inversible possède une décomposition QR. Il n'y a pas unicité d'une telle décomposition : $Q_1R_1 = Q_2R_2$ si et seulement s'il existe $T \in \mathbb{T}_n$ telle que $Q_2 = Q_1T^*$ et $R_2 = TR_1$. Il existe une unique décomposition $A = QR$ telle que R ait des termes diagonaux strictement positifs.

Preuve. Une telle décomposition peut s'obtenir par la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliquée aux colonnes de la matrice A . Ceci prouve l'existence de la décomposition. Si $Q_1R_1 = Q_2R_2$ alors $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$ qui est une matrice à la fois triangulaire supérieure et unitaire. Une telle matrice est nécessairement diagonale. Enfin, il faut noter qu'il n'y a qu'une seule manière de rendre positif un nombre complexe non nul en le multipliant par un nombre complexe de module 1. Ceci prouve la dernière assertion. ■

On peut relier la décomposition QR de A à la décomposition de Choleski de $A^T A$ que nous allons décrire :

Définition 6.9 Soit B une matrice $n \times n$ définie positive. On appelle décomposition de Choleski de B une identité $B = R^*R$ avec R triangulaire supérieure à termes diagonaux strictement positifs.

Proposition 6.5 Toute matrice B définie positive possède une décomposition de Choleski. Cette décomposition est unique.

Preuve. Si $B = R_1^*R_1 = R_2^*R_2$ avec $(R_1)_{ii}$ et $(R_2)_{ii} > 0$ alors $R_2^{-*}R_1^* = R_2R_1^{-1}$. Cette matrice étant à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est diagonale. Les termes diagonaux sont égaux à $(R_1)_{ii}/(R_2)_{ii} = (R_2)_{ii}/(R_1)_{ii}$ et sont positifs donc égaux à 1. Ainsi $R_2R_1^{-1} = I_n$ et ceci prouve que $R_2 = R_1$. L'existence se prouve par récurrence. Le résultat est évident pour $n = 1$. Ecrivons

$$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & b \\ b^* & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n-1}^* & 0 \\ r^* & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{n-1} & r \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $R_{n-1}^*R_{n-1}$ est la décomposition de Choleski de B_{n-1} ; cette matrice, obtenue en supprimant de B la dernière ligne et la dernière colonne, est définie positive et, par l'hypothèse de récurrence, elle possède une décomposition de Choleski. L'égalité précédente suppose que $R_{n-1}^*r = b$ et $r^*r + \gamma^2 = \beta$ ce qui détermine $r = R_{n-1}^*b$ et $\gamma^2 = \beta - r^*r$. Il reste à prouver que l'on peut prendre $\gamma > 0$. Cela résulte de l'équation

$$0 < \det B = \det R_{n-1}^* \det R_{n-1} \gamma^2 = |\det R_{n-1}|^2 \gamma^2$$

qui prouve que $\gamma^2 > 0$. On peut donc prendre $\gamma > 0$. ■

Proposition 6.6 La décomposition de Choleski est une application bijective, C^∞ ainsi que son inverse.

Preuve. Notons $Ch : \mathbb{H}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}_n^+$ l'application qui à la matrice $B \in \mathbb{H}_n^+$ associe $R \in \mathbb{R}_n^+$ telle que $B = R^*R$. Nous venons de voir que Ch est bijective, la bijection réciproque est $Ch^{-1}(R) = R^*R$. Notons que Ch^{-1} est de classe C^∞ . La dérivée de Ch^{-1} est donnée par

$$DCh^{-1}(R) : \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{H}_n, \quad DCh^{-1}(R)(S) = S^*R + R^*S.$$

Nous allons prouver que $DCh^{-1}(R)$ est un isomorphisme. On en déduira, par application du théorème d'inversion locale 2.2, que Ch^{-1} possède un inverse C^∞ . Comme les espaces \mathbb{R}_n et \mathbb{H}_n ont même dimension, il suffit de prouver que le noyau de $DCh^{-1}(R)$ est nul. Si $DCh^{-1}(R)(S) = 0$ on a $S^*R + R^*S = 0$ c'est-à-dire que $R^*S = -(R^*S)^*$. Cette matrice est donc antihermitienne. Les entrées de sa première colonne sont $(R^*S)_{i1} = R_{i1}^*S_{11}$. Le premier de la liste est $(R^*S)_{11} = R_{11}^*S_{11}$ qui est nul puisque R^*S est anti-hermitienne. Donc $S_{11} = 0$ et par suite $(R^*S)_{i1} = 0$ pour tout i . Comme R^*S est anti-hermitienne la première ligne est aussi nulle; en continuant ainsi avec les autres colonnes et lignes on prouve que $R^*S = 0$ et donc $S = 0$ puisque R est inversible. ■

Nous pouvons maintenant relier les décompositions de Choleski et QR. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente, nous le donnons sans démonstration.

Proposition 6.7 Notons $A = Q_A R_A$ la décomposition QR de A telle que $R_A \in \mathbb{R}_n^+$. R_A est la décomposition de Cholesky de $A^* A$. Les applications $A \in \mathbb{GL}_n \rightarrow \mathbb{R}_A \in \mathbb{R}_n^+$ et $A \in \mathbb{GL}_n \rightarrow Q_A \in \mathbb{U}_n$ sont de classe C^∞ .

6.6.2 La décomposition de Schur.

Définition 6.10 On appelle décomposition de Schur de A une identité $A = QRQ^*$ avec Q orthogonale dans le cas réel, unitaire dans le cas complexe et R triangulaire supérieure et inversible.

Proposition 6.8 Toute matrice A $n \times n$ possède une décomposition de Schur.

Preuve. Cela se prouve par récurrence sur la taille de la matrice. Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Le passage de $n - 1$ à n se fait comme suit : on se donne une valeur propre et un vecteur propre associé : $Av = \lambda v$ ainsi qu'une matrice unitaire Q dont la première colonne est v : $Q = \begin{pmatrix} v & P \end{pmatrix}$. On a alors

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} v^* A v & v^* A P \\ P^* A v & P^* A P \end{pmatrix}.$$

Notons que $P^* A v = \lambda P^* v = 0$ puisque Q est unitaire. Si l'on introduit une décomposition de Schur de $P^* A P = Q_1 R_1 Q_1^*$ on obtient

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} v^* A v & v^* A P \\ 0 & Q_1 R_1 Q_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* A v & v^* A P Q_1 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^* \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$ est unitaire et que $\begin{pmatrix} v^* A v & v^* A P Q_1 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure d'où la conclusion. ■

Pour une matrice A réelle, les matrices Q et R d'une décomposition de Schur ne seront réelles que si les valeurs propres de A sont elles-mêmes réelles.

6.6.3 La variété des drapeaux.

Nous avons montré, exemple 4.3.5, que l'ensemble des drapeaux pouvait être muni d'une structure de variété analytique. Nous allons un peu mieux préciser la structure topologique de cet ensemble. Elle est déduite de sa description d'espace quotient : $\mathbb{F}_n = \mathbb{GL}_n / \mathbb{R}_n = \mathbb{U}_n / \mathbb{T}_n$.

Lemme 2 Les deux structures quotient $\mathbb{GL}_n / \mathbb{R}_n$ et $\mathbb{U}_n / \mathbb{T}_n$ définissent sur \mathbb{F}_n la même topologie.

Preuve. C'est une conséquence du lemme 1. On y prend $E = \mathbb{GL}_n$, $F = \mathbb{U}_n$ et pour $f : E \rightarrow F$ l'application $X \in \mathbb{GL}_n \rightarrow Q_X \in \mathbb{U}_n$ donnée par la décomposition QR : $X = Q_X R_X$. Cette application est continue par la proposition 6.7. ■

Puisque \mathbb{F}_n est muni de cette topologie quotient et puisque \mathbb{U}_n est compact on a :

Corollaire 6.3 \mathbb{F}_n est un espace compact.

Enfin, par le lemme 1 et puisque \mathbb{U}_n est compact on a :

Proposition 6.9 Notons (F_k) une suite de drapeaux et P_k une matrice unitaire telle que $F_k = \langle P_k \rangle$. Soient $F \in \mathbb{F}_n$ et $P \in \mathbb{U}_n$ avec $F = \langle P \rangle$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $F_k \rightarrow F$ est qu'il existe des matrices $T_k \in \mathbb{T}_n$ telles que $P_k T_k \rightarrow P$.

6.6.4 L'action de A sur la variété des drapeaux.

L'opérateur $A \in \mathbb{GL}_n$ définit une action $A_{\#} : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n$ sur cet espace de la façon suivante : à tout drapeau $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ on associe le drapeau image $A_{\#}(F) = A(F_0) \subset A(F_1) \subset \dots \subset A(F_n)$. Du point de vue matriciel $A_{\#}(\langle X \rangle) = \langle AX \rangle$.

L'intérêt d'introduire ce nouvel opérateur réside est décrit dans la proposition suivante :

Proposition 6.10 Un drapeau $F = \langle Q \rangle$ avec Q unitaire est un point fixe de $A_{\#}$ si et seulement si on peut écrire $A = QRQ^*$ avec R triangulaire supérieure. Autrement dit, les points fixes de $A_{\#}$ sont associés à ses décompositions de Schur.

Démonstration. La condition de point fixe $A_{\#} \langle Q \rangle = \langle Q \rangle$ signifie que les matrices AQ et Q définissent le même drapeau. Donc il existe R triangulaire supérieure et inversible telle que $AQ = QR$ c'est à dire $A = QRQ^*$. ■

Nous reprenons l'idée de calculer de tels points fixes par la méthode des approximations successives.

Théorème 6.15 (Shub-Vasquez) Supposons que A ait des valeurs propres de modules distincts. Alors $A_{\#}$ possède $n!$ points fixes. Pour tout drapeau F , la suite

$$F_0 = F, F_{k+1} = A_{\#}(F_k)$$

converge. Le bassin d'attraction de l'un de ces points fixes est ouvert et dense dans \mathbb{F}_n .

Démonstration. Puisque les valeurs propres de A ont des modules distincts, A est diagonalisable : $A = MDM^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres étant rangées par module décroissant :

$$|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

De plus,

$$A_{\#} = (MDM^{-1})_{\#} = M_{\#}D_{\#}(M^{-1})_{\#} = M_{\#}D_{\#}(M_{\#})^{-1}$$

de sorte que la dynamique de $A_{\#}$ se déduit de celle de $D_{\#}$ pour laquelle nous allons établir le théorème.

Soit Σ_n le sous-groupe de \mathbb{GL}_n constitué par les $n!$ matrices de permutation. L'ensemble

$$\{ \langle P \rangle : P \in \Sigma_n \} \subset \mathbb{F}_n$$

est constitué de $n!$ éléments distincts dans \mathbb{F}_n . En effet $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle$ si et seulement si $P_1 = P_2 R$ avec R triangulaire supérieure. Comme $\mathbb{R}_n \cap \Sigma_n = \{I_n\}$ on a $P_1 = P_2$.

Pour voir que $\langle P \rangle$ pour $P \in \Sigma_n$ est un point fixe on note que

$$D_{\#}(\langle P \rangle) = \langle DP \rangle = \langle P(P^{-1}DP) \rangle = P(P^{-1}DP)\mathbb{R}_n = P\mathbb{R}_n = \langle P \rangle$$

parce que $P^{-1}DP$ est une matrice diagonale.

Notons

$$W^s(\langle P \rangle) = \{ \langle X \rangle : \lim_{k \rightarrow \infty} D_{\#}^k(\langle X \rangle) = \langle P \rangle \}$$

et \mathbb{L}_n l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et inversibles. Nous allons prouver que

$$\mathbb{L}_n \langle P \rangle = \{ \langle LP \rangle : L \in \mathbb{L}_n \} \subset W^s(\langle P \rangle).$$

En effet

$$D_{\#}(\langle LP \rangle) = DLP\mathbb{R}_n = (DLD^{-1})DP\mathbb{R}_n = (DLD^{-1})P\mathbb{R}_n = \langle DLD^{-1}P \rangle$$

et par récurrence

$$D_{\#}^k(\langle LP \rangle) = \langle D^k LD^{-k} P \rangle.$$

Mais $(D^k LD^{-k})_{ij} = (\lambda_i/\lambda_j)^k L_{ij}$ de sorte que

1. $(D^k LD^{-k})_{ij} = 0$ lorsque $j > i$ puisque L est triangulaire inférieure,
2. $(D^k LD^{-k})_{ij} \rightarrow 0$ lorsque $j < i$ parce que $|\lambda_i/\lambda_j| < 1$,
3. $(D^k LD^{-k})_{ii} = L_{ii}$.

Ceci prouve, en utilisant la proposition 6.3 que $\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\#}^k(\langle LP \rangle) = \langle D'P \rangle$ avec $D' = \text{Diag}(L_{ii})$. En conséquence

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_{\#}^k(\langle LP \rangle) = P(P^{-1}D'P)\mathbb{R}_n = P\mathbb{R}_n = \langle P \rangle$$

de sorte que $\langle LP \rangle \in W^s(\langle P \rangle)$.

Nous allons démontrer maintenant que

$$\mathbb{F}_n = \bigcup_{P \in \Sigma_n} \mathbb{L}_n \langle P \rangle.$$

Cela résulte de l'égalité

$$\mathbb{GL}_n = \mathbb{L}_n \Sigma_n \mathbb{R}_n :$$

toute matrice inversible peut s'écrire LPR avec $L \in \mathbb{L}_n$, $P \in \Sigma_n$ et $R \in \mathbb{R}_n$. Prouver ce résultat demande un peu d'attention. Soit $B \in \mathbb{GL}_n$. Supposons que les lignes L_i et

L_j de B^{-1} , $i < j$, se terminent par le même nombre de zéros. Alors, en additionnant à L_i un multiple convenable de L_j on peut augmenter le nombre de zéros terminaux de L_i d'au moins une unité. Cette opération revient à multiplier B^{-1} à gauche par une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité convenable. Si l'on répète cette opération autant que faire se peut, on arrive à une matrice C dont les lignes ont des nombres différents de zéros terminaux. Une telle matrice est du type $C = PL$ avec P matrice de permutation et L triangulaire inférieure. Ainsi il existe U triangulaire supérieure à diagonale unité telle que $UB^{-1} = PL$ c'est à dire

$$B = L^{-1}P^{-1}U \in \mathbb{L}_n \Sigma_n \mathbb{R}_n.$$

On a obtenu

$$\mathbb{F}_n = \bigcup_{P \in \Sigma_n} W^s(\langle P \rangle),$$

cette union est disjointe et

$$W^s(\langle P \rangle) = \mathbb{L}_n \langle P \rangle.$$

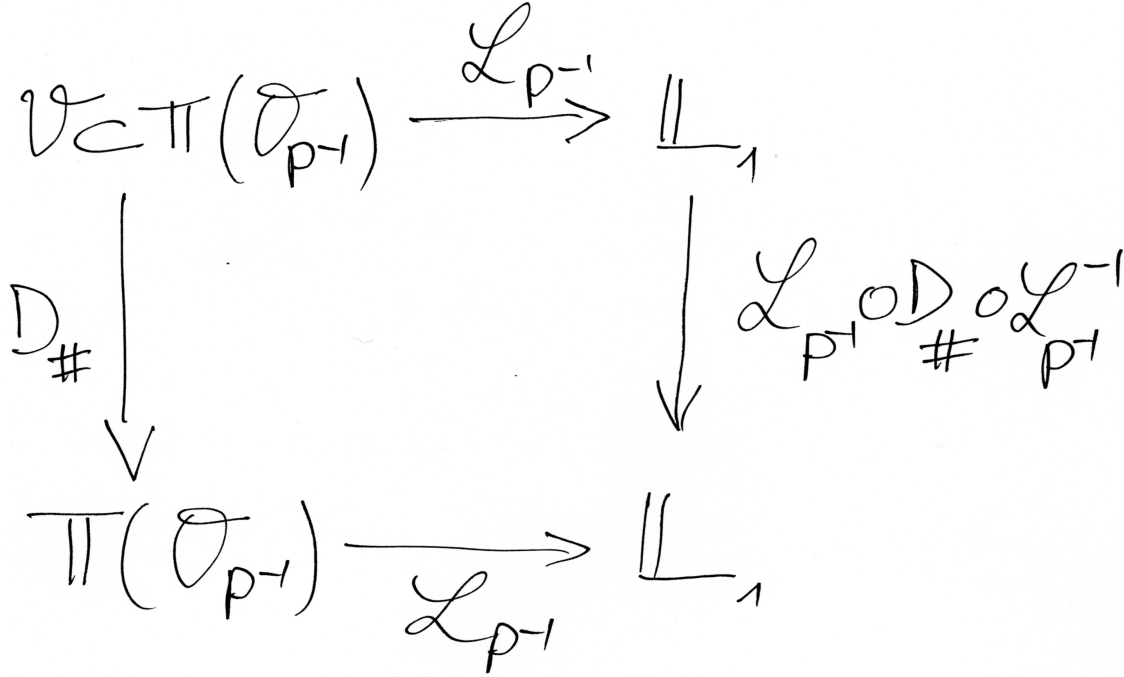
Pour conclure il faut prouver que l'un de ces ensembles est ouvert et dense dans \mathbb{F}_n . Ceci provient du fait que, dans la plupart des cas, la construction de U , P et L peut se faire avec $P = I_n$ de sorte que, $\mathbb{L}_n \mathbb{R}_n$ est ouvert et dense dans \mathbb{GL}_n . Cette affirmation résulte par exemple du lemme suivant : $A \in \mathbb{GL}_n$ possède une décomposition LU , c'est-à-dire $A = LU \in \mathbb{L}_n \mathbb{R}_n$, si et seulement si ses mineurs principaux sont non nuls voir [20] Proposition. L'ensemble défini dans \mathbb{GL}_n par des conditions de nullité sur les mineurs est fermé et son complémentaire dense. En utilisant la proposition 6.3 on déduit que $\mathbb{L}_n \langle I_n \rangle = W^s(\langle I_n \rangle)$ est ouvert et dense dans \mathbb{F}_n . Le point fixe qui correspond à $P = I_n$ est le drapeau $F = F_0 \subset \dots \subset F_n$ où F_k est le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ c'est-à-dire les k valeurs propres de plus grand module. ■

Théorème 6.16 (Shub-Vasquez) *Supposons que A ait des valeurs propres de modules distincts :*

$$|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

Alors les $n!$ points fixes de A_{\sharp} sont hyperboliques et, si X est l'un d'entre-eux, il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que les valeurs propres de $DA_{\sharp}(X)$ soient $\lambda_{\sigma(i)}/\lambda_{\sigma(j)}$, $1 \leq j < i \leq n$.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 6.15 nous allons supposer que A est la matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et que X est une matrice de permutation notée P associée à une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Reprenons les notations \mathcal{O}_P et \mathcal{L}_P introduites au paragraphe 4.3.5. Notons que $P \in \mathcal{O}_{P^{-1}}$ et que, puisque $D_{\sharp}(\langle P \rangle) = \langle P \rangle$, un voisinage \mathcal{V} de $\langle P \rangle$ dans $\pi(\mathcal{O}_{P^{-1}})$ est envoyé dans $\pi(\mathcal{O}_{P^{-1}})$ par D_{\sharp} d'où le diagramme



Notons que $\mathcal{L}_{P-1}(\langle P \rangle) = I_n$. Pour tout $L \in \mathcal{L}_{P-1}(\mathcal{V})$ posons $\mathcal{L}_{P-1}^{-1}(L) = \langle Y \rangle$ de sorte que $P^{-1}Y = LR$ pour une matrice $R \in \mathbb{R}_n$. Notons

$$\mathcal{L}_{P-1} \circ D_{\#} \circ \mathcal{L}_{P-1}^{-1}(L) = L_1.$$

On a donc $\mathcal{L}_{P-1}(\langle DY \rangle) = L_1$ c'est à dire $P^{-1}DY = L_1R_1$ pour une matrice $R_1 \in \mathbb{R}_n$ de sorte que $P^{-1}DPLR = L_1R_1$. La matrice $P^{-1}DP$ est donnée par

$$P^{-1}DP = \text{Diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$$

pour une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$. Par ailleurs $P^{-1}DPL = L_2P^{-1}DP$ où $L_2 \in \mathbb{L}_{1n}$ avec $L_{2ij} = \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}L_{ij}$ pour tout $i > j$. Ainsi

$$L_1R_1 = P^{-1}DPLR = L_2P^{-1}DPR$$

et, par unicité de la décomposition LR, $L_1 = L_2$. La conclusion (provisoire) que nous avons obtenu est la suivante :

$$\mathcal{L}_{P-1} \circ D_{\#} \circ \mathcal{L}_{P-1}^{-1}(L) = L_1 \text{ avec } L_{1ij} = \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}L_{ij} \text{ pour tout } 1 \leq j < i \leq n.$$

Le spectre de la dérivée $DD_{\#}(P)$ est le même que celui de $D(\mathcal{L}_{P-1} \circ D_{\#} \circ \mathcal{L}_{P-1}^{-1})(I_n)$ qui est une application linéaire définie sur l'espace tangent à \mathbb{L}_{1n} . C'est l'espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle :

$$\mathbb{L}_{0n} = \{U \in \mathbb{C}^{n \times n} : U_{ij} = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j \leq n\}.$$

La dérivée est donnée par

$$D(\mathcal{L}_{P-1} \circ D_{\#} \circ \mathcal{L}_{P-1}^{-1})(I_n)(U) = V \text{ avec } V_{ij} = \frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}U_{ij}.$$

Il s'agit d'un opérateur diagonal dont les valeurs propres sont les $\frac{\lambda_{\sigma(i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}$ pour $1 \leq j < i \leq n$. Comme les λ_i sont de modules distincts, ces valeurs propres sont de modules $\neq 1$ ce qui prouve que P est un point fixe hyperbolique. ■

6.6.5 L'algorithme QR de Francis.

Soit $A \in \mathbb{GL}_n$. L'algorithme QR, pour le calcul de toutes les valeurs propres de A est défini de la façon suivante : on construit deux suites $Q_k \in \mathbb{U}_n$ et $R_k \in \mathbb{R}_n$ par :

$$A = Q_1 R_1 \text{ et } A_{k+1} = R_k Q_k = Q_{k+1} R_{k+1},$$

à chaque étape on calcule la décomposition QR de la matrice définie par $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Proposition 6.11 *Soit $A \in \mathbb{GL}_n$ dont les valeurs propres ont des modules distincts. Notons (A_k) la suite produite par la méthode QR. Lorsque $k \rightarrow \infty$ la diagonale de A_k converge vers l'ensemble des valeurs propres de A et les éléments de la partie triangulaire inférieure stricte convergent vers 0. Il n'y a pas nécessairement convergence des éléments de la partie triangulaire supérieure stricte : leurs modules convergent mais pas leurs arguments.*

Démonstration. Comme les matrices Q_k sont unitaires on obtient

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* Q_k R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k = \dots = P_k^* A P_k$$

avec

$$P_k = Q_1 \dots Q_k.$$

Ceci prouve que l'algorithme QR produit une suite de matrices A_k qui sont unitairement semblables à la matrice A . De plus

$$\begin{aligned} A P_k &= (Q_1 R_1) Q_1 Q_2 \dots Q_k = Q_1 (R_1 Q_1) Q_2 \dots Q_k = Q_1 (Q_2 R_2) Q_2 \dots Q_k = \\ &= Q_1 Q_2 \dots Q_k (R_k Q_k) = Q_1 Q_2 \dots Q_k Q_{k+1} R_{k+1} = P_{k+1} R_{k+1} \end{aligned}$$

de sorte que $\langle P_{k+1} \rangle = A_{\#}(\langle P_k \rangle)$, autrement dit $\langle P_k \rangle$ est la suite des approximations successives associée à l'opérateur $A_{\#}$ et au point initial $\langle P_0 \rangle = \langle I_n \rangle$. Nous avons vu qu'une telle suite converge : il existe $P \in \mathbb{U}_n$ telle que $\lim \langle P_k \rangle = \langle P \rangle$ dans l'espace \mathbb{F}_n . Par la proposition 6.9 il existe une suite (T_k) dans \mathbb{T}_n telle que $\lim P_k T_k = P$. Revenons maintenant à la suite (A_k) . Notons $S_k = (P_k T_k)^* A (P_k T_k)$. On a

$$A_{k+1} = P_k^* A P_k = T_k (P_k T_k)^* A (P_k T_k) T_k^* = T_k S_k T_k^*.$$

Comme $\langle P \rangle$ est un point fixe de $A_{\#}$ il existe $R \in \mathbb{R}_n$ tel que $AP = PR$ de sorte que

$$\lim (P_k T_k)^* A (P_k T_k) = P^* (AP) = P^* (PR) = R.$$

Il est maintenant facile d'étudier le comportement limite de $A_{k+1} = T_k S_k T_k^*$: les termes diagonaux convergent vers ceux de R et les termes de la partie triangulaire inférieure stricte vers 0. Quant à ceux de la partie supérieure ils ne convergent pas nécessairement : leurs modules convergent (puisque les entrées des matrices T_k sont de module 1) mais pas leurs arguments. ■

7. Sous-espaces invariants

7.1 Qu'est-ce qu'un sous-espace invariant ?

Définition 7.1 Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ou bien $\in \mathbb{R}^{n \times n}$. Un sous-espace vectoriel \mathcal{X} de $E = \mathbb{C}^n$ ou \mathbb{R}^n suivant le cas est un sous-espace invariant de A si $A\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$.

Pensons aux directions propres de A , à un plan de rotation et cetera.

Théorème 7.1 Soit \mathcal{X} un sous-espace invariant de A et soit X une matrice dont les colonnes forment une base de \mathcal{X} . Il existe une unique matrice L telle que

$$AX = XL.$$

Démonstration. Comme X^*X est inversible on a $L = (X^*X)^{-1}AX$ d'où l'unicité. Ecrivons $X = [x_1 \dots x_k]$ où les x_j sont les colonnes de X . Comme $Ax_j \in \mathcal{X}$ on peut écrire que

$$Ax_j = x_1 l_{1j} + \dots + x_k l_{kj}$$

et l'on pose $L = (l_{ij})$. ■

Une seconde caractérisation des sous-espaces invariants est donnée par :

Théorème 7.2 Soit \mathcal{X} un sous-espace de E et soit $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp$. Notons X (resp. Y) une matrice dont les colonnes forment une base de \mathcal{X} (resp. \mathcal{Y}). \mathcal{X} est un sous-espace invariant de A si et seulement si

$$Y^*AX = 0.$$

Démonstration.

$$A\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \Leftrightarrow A\mathcal{X} \perp \mathcal{Y} \Leftrightarrow Y^*AX = 0. \blacksquare$$

Prenons pour X et pour Y des matrices associées à des bases orthonormées de \mathcal{X} et de \mathcal{Y} . La matrice (XY) constituée des colonnes de X et de celles de Y est une matrice unitaire et, si \mathcal{X} est un sous-espace invariant, en vertu du théorème précédent

$$(XY)^*A(XY) = \begin{pmatrix} X^*AX & X^*AY \\ Y^*AX & Y^*AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & H \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que les valeurs propres de A sont celles de L_1 et celles de L_2 .

Définition 7.2 *Un sous-espace invariant est simple si $\text{Spec}(L_1) \cap \text{Spec}(L_2) = \emptyset$.*

Ouvrons une parenthèse sur l'équation de Sylvester.

Définition 7.3 *Soient $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$. L'équation de Sylvester est*

$$AX - XB = C$$

où l'inconnue est $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Théorème 7.3 *Lorsque $\text{Spec}(A) \cap \text{Spec}(B) = \emptyset$, pour tout $C \in \mathbb{C}^{m \times n}$, l'équation de Sylvester possède une et une seule solution.*

Démonstration. Via une décomposition de Schur $B = VTV^*$ où V est unitaire et T triangulaire supérieure, l'équation de Sylvester devient

$$AY - YT = D$$

avec $Y = XV$ et $D = CV$. Notons y_1, \dots, y_n les colonnes de Y et d_1, \dots, d_n celles de D . Comme T est triangulaire supérieure on obtient

$$(A - t_{11}I_m)y_1 = d_1.$$

Comme $t_{11} \in \text{Spec}(B)$, la matrice $A - t_{11}I_m$ est inversible et cela donne y_1 . Supposons avoir déterminé y_1, \dots, y_{k-1} . On doit avoir

$$Ay_k - \sum_{i=1}^k t_{ik}y_i = d_k$$

d'où

$$(A - t_{kk}I_m)y_k = \sum_{i=1}^{k-1} t_{ik}y_i + d_k.$$

Comme $t_{kk} \in \text{Spec}(B)$, la matrice $A - t_{kk}I_m$ est inversible et cela donne y_k . ■

Refermons cette parenthèse sur les équations de Sylvester et revenons aux sous-espaces invariants.

Théorème 7.4 *Soit \mathcal{X} est un sous-espace invariant simple de A . Soient X, Y, L_1 et L_2 telles que (XY) soit unitaire et que*

$$(XY)^* A (XY) = \begin{pmatrix} L_1 & H \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice X' telle que (XX') soit inversible et

$$A = (XX') \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} (XX')^{-1}.$$

Démonstration. Recherchons une matrice Q telle que

$$\begin{pmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & H \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Ceci revient à trouver Q telle que

$$L_1 Q - Q L_2 = -H.$$

Une telle matrice existe par le théorème précédent puisque \mathcal{X} est simple. On a alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} A(XY) \begin{pmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X^* - QY^* \\ Y^* \end{pmatrix} A(X \ XQ + Y) = (X - YQ^* \ Y)^* A(X \ XQ + Y). \end{aligned}$$

Il suffit pour conclure de remarquer que $(X - YQ^* \ Y)^*$ et $(X \ XQ + Y)$ sont inverses l'une de l'autre. ■

Corollaire 7.1 *Soit \mathcal{X} est un sous-espace invariant simple de A . Il existe un second sous-espace invariant \mathcal{Y} tel que $E = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$.*

Démonstration. Il faut prendre \mathcal{Y} engendré par les colonnes de X' . ■

Corollaire 7.2 *Lorsque les valeurs propres de A sont de modules distincts, les sous-espaces invariants de A sont simples et engendrés par des vecteurs propres.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout sous-espace invariant contient un vecteur propre. On le prouve en utilisant la méthode de la puissance et le fait que les valeurs propres sont de modules distincts. ■

7.2 L'action de A sur la grassmannienne

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible et dont les valeurs propres sont de modules distincts :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0.$$

L'action de A sur la grassmannienne est définie par

$$A_{\spadesuit} : \mathbb{G}_{n,k} \rightarrow \mathbb{G}_{n,k}, \quad A_{\spadesuit} \mathcal{X} = A(\mathcal{X}).$$

Ses points fixes sont les sous-espaces invariants de A . Puisque les modules des valeurs propres de A sont distincts, ces sous-espaces sont engendrés par k vecteurs propres. Il y a donc $\binom{n}{k}$ tels sous-espaces.

Notons U_1, \dots, U_n une base de vecteurs propres de A , U_i étant associé à λ_i , $[U_1, \dots, U_k]$ le sous-espace engendré par les k vecteurs indiqués et $(U_1 \dots U_k)$ la matrice dont les colonnes sont U_1, \dots, U_k . Nous allons prouver que

Théorème 7.5 *Pour tout $\mathcal{X} \in \mathbb{G}_{n,k}$, la suite $(A_{\blacklozenge}^p \mathcal{X})$ converge vers l'un des points fixes de A_{\blacklozenge} et le bassin d'attraction de $[U_1, \dots, U_k]$ est ouvert et dense. Ces points fixes sont hyperboliques : si $\mathcal{X} = [U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(k)}]$ où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, les valeurs propres de $DA_{\blacklozenge}(\mathcal{X})$ sont*

$$\frac{\lambda_{\sigma(k+i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}, \quad 1 \leq i \leq n - k, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Elles sont toutes de module $\neq 1$.

La première partie de ce théorème se déduit d'un résultat similaire quant à l'action de A sur la variété des drapeaux. Nous allons donc préciser les rapports entre $\mathbb{G}_{n,k}$ et \mathbb{F}_n .

Lemme 3 *Considérons le diagramme suivant :*

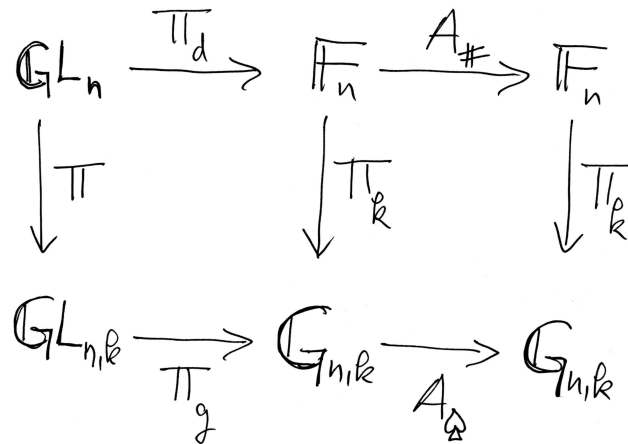


Table 7.1: Drapeaux et grassmannienne.

où les applications sont définies par

- Π_g surjection canonique (voir Exemple 4.3.4),
- Π_d surjection canonique (voir Exemple 4.3.5),
- $\Pi_k(F) = F_k$ lorsque $F = (F_1 \subset \dots \subset F_k \subset \dots \subset F_n)$,
- $\Pi((X_1 \dots X_n)) = (X_1 \dots X_k)$,
- A_{\blacklozenge} action de A sur les drapeaux (voir Exemple 4.3.5).

Avec ces notations, l'application Π_k est surjective, continue et l'image par Π_k d'un ouvert de \mathbb{F}_n est un ouvert de $\mathbb{G}_{n,k}$. Enfin

$$\Pi_g \circ \Pi = \Pi_k \circ \Pi_d \text{ et } A_{\spadesuit} \circ \Pi_k = \Pi_k \circ A_{\clubsuit}.$$

Démonstration. La surjectivité est immédiate ainsi que les deux relations de commutativité. Π_k est continue parce que $\Pi_k \circ \Pi_d = \Pi_g \circ \Pi$ est continue (voir le paragraphe 4.3.1). Enfin, si Ω est un ouvert de \mathbb{F}_n c'est l'image par Π_d d'un ouvert O de \mathbb{GL}_n par définition de la topologie quotient; il est alors clair que

$$\Pi_k(\Omega) = \Pi_g \circ \Pi(O)$$

est un ouvert de $\mathbb{G}_{n,k}$. ■

Démonstration du Théorème 7.5. Soit $\mathcal{X} \in \mathbb{G}_{n,k}$ engendré par les colonnes X_1, \dots, X_k d'une matrice $X \in \mathbb{GL}_{n,k}$ c'est à dire

$$\mathcal{X} = \Pi_g(X).$$

Complétons ces colonnes pour obtenir une base $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n$, notons $Y \in \mathbb{GL}_n$ la matrice définie par ces colonnes et enfin

$$\mathcal{Y} = \Pi_d(Y) \in \mathbb{F}_n.$$

Par construction on a :

$$\mathcal{X} = \Pi_k(\mathcal{Y}).$$

L'action de A sur \mathcal{X} se déduit de l'action de A sur \mathcal{Y} comme cela a été indiqué au lemme précédent :

$$A_{\spadesuit} \Pi_k(\mathcal{Y}) = \Pi_k A_{\clubsuit}(\mathcal{Y})$$

et en itérant

$$A_{\spadesuit}^p \Pi_k(\mathcal{Y}) = \Pi_k A_{\clubsuit}^p(\mathcal{Y}).$$

Pour prouver la première partie du théorème il suffit d'utiliser le Théorème 6.15, le lemme précédent et de noter que tout point fixe de A_{\spadesuit} est l'image par Π_k d'un point fixe de A_{\clubsuit} .

Passons au calcul des valeurs propres de $DA_{\spadesuit}(\mathcal{X})$. Nous allons commencer par prouver que l'on peut supposer A diagonale. Ecrivons $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(\lambda_i)$. Notons que

$$A_{\spadesuit} = P_{\spadesuit} D_{\spadesuit} (P^{-1})_{\spadesuit} = P_{\spadesuit} D_{\spadesuit} (P_{\spadesuit})^{-1}$$

d'où, par dérivation des fonctions composées,

$$DA_{\spadesuit}(\mathcal{X}) = DP_{\spadesuit}(DP^{-1}\mathcal{X})DD_{\spadesuit}(P^{-1}\mathcal{X})D(P_{\spadesuit})^{-1}(\mathcal{X}).$$

Lorsque $A_{\spadesuit}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ on a $DP^{-1}\mathcal{X} = P^{-1}\mathcal{X}$ de sorte que

$$DA_{\spadesuit}(\mathcal{X}) = DP_{\spadesuit}(P^{-1}\mathcal{X})DD_{\spadesuit}(P^{-1}\mathcal{X})D(P_{\spadesuit})^{-1}(\mathcal{X}) =$$

$$DP_{\blacklozenge}(P^{-1}\mathcal{X})DD_{\blacklozenge}(P^{-1}\mathcal{X})(DP_{\blacklozenge}(P^{-1}\mathcal{X}))^{-1}$$

de sorte que les valeurs propres de $DA_{\blacklozenge}(\mathcal{X})$ et $DD_{\blacklozenge}(P^{-1}\mathcal{X})$ sont les mêmes. Ceci permet de prendre

$$A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Soit \mathcal{X} un point fixe de A_{\blacklozenge} . Posons

$$\mathcal{X} = [e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}] \text{ et } X = (e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(k)})$$

où e_1, \dots, e_n est la base canonique et où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Notons P la matrice de permutation dont les colonnes sont $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$ de sorte que

$$X = P \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit (G, ϕ) la carte en \mathcal{X} donnée par (voir Exemple 4.3.4)

$$G = \left\{ \Pi_g(V) : V = P \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}, U \in \mathbb{GL}_k \right\}$$

et

$$\phi(\Pi_g(V)) = WU^{-1} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}.$$

L'expression de A_{\blacklozenge} dans cette carte est donnée par

$$\phi \circ A_{\blacklozenge} \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^{(n-k) \times k} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-k) \times k},$$

$$\phi \circ A_{\blacklozenge} \circ \phi^{-1}(W) = \phi \left(\Pi_g \left(AP \begin{pmatrix} I_k \\ W \end{pmatrix} \right) \right) = \phi \left(\Pi_g \left(P(P^{-1}AP) \begin{pmatrix} I_k \\ W \end{pmatrix} \right) \right).$$

Comme A est diagonale on a $P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ ce qui donne

$$\phi \circ A_{\blacklozenge} \circ \phi^{-1}(W) = \text{Diag}(\lambda_{\sigma(k+i)}, 1 \leq i \leq n-k) W \text{Diag}(\lambda_{\sigma(j)}, 1 \leq j \leq k)^{-1}.$$

Il s'agit là d'un opérateur linéaire diagonal \mathcal{D} défini sur $\mathbb{R}^{(n-k) \times k}$. Ses valeurs propres sont

$$\frac{\lambda_{\sigma(k+i)}}{\lambda_{\sigma(j)}}, \quad 1 \leq i \leq n-k, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Ce sont aussi les valeurs propres de $DA_{\blacklozenge}(\mathcal{X})$ parce que

$$DA_{\blacklozenge}(\mathcal{X}) = D\phi(\mathcal{X})\mathcal{L}D\phi(\mathcal{X})^{-1}. \blacksquare$$

L'implémentation de cette méthode consiste à se donner une matrice $X \in \mathbb{GL}_{n,k}$ et à calculer des itérés AX, A^2X, \dots, A^pX et cetera. Pour éviter d'inévitables overflows on normalise de temps en temps la matrice A^pX à l'aide d'une décomposition QR. Notons que si $A^pX = QR$ (Q orthogonale et R triangulaire supérieure) alors $\Pi_g(A^pX) = \Pi_g(Q)$: on ne change pas de sous-espace mais seulement de représentation.

8. Champs de vecteurs et équations différentielles

8.1 Champs de vecteurs, trajectoires

Un champ de vecteur \vec{v} sur une variété M est une fonction

$$\vec{v} : M \rightarrow TM$$

telle que $\vec{v}(m) \in T_m M$ pour tout $m \in M$; autrement dit, à chaque point m on associe un vecteur tangent en m .

Lorsque $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte locale de M on obtient une représentation locale \vec{V} de \vec{v} en posant

$$\vec{V}(\phi(m)) = D\phi(m)(\vec{v}(m)), \quad m \in U.$$

\vec{V} est un champ de vecteurs défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Ses coordonnées sont notées (V^1, \dots, V^n) , ce sont les coordonnées locales de \vec{v} dans la carte (U, ϕ) .

Si M est une variété de classe C^k , on dit que le champ de vecteurs \vec{v} est de classe C^r , $1 \leq r \leq k$, si ses représentations locales sont de classe C^r quel que soit la carte locale choisie. Tous les champs de vecteurs considérés seront au moins de classe C^1 .

Rappelons qu'une courbe c dans M est une application de classe C^1 , $c : I \rightarrow M$, où I est un intervalle ouvert contenant l'origine : $0 \in I$ (l'usage est de prendre les conditions initiales à l'origine).

Définition 8.1 Soit \vec{v} un champ de vecteurs sur M . Une courbe intégrale de \vec{v} en $m \in M$ est une courbe c telle que $c(0) = m$ et $\dot{c}(t) = \vec{v}(c(t))$ pour tout $t \in I$ (dérivée par rapport au temps $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t)$).

Si l'on introduit une carte locale et la représentation locale de \vec{v} comme plus haut, on obtient une représentation locale de la courbe intégrale en posant $C = \phi \circ c$. On a

$$\dot{C}(t) = \vec{V}(C(t)).$$

En effet

$$\dot{C}(t) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c)(t) = D\phi(c(t))\dot{c}(t) = D\phi(c(t))\vec{v}(c(t)) = \vec{V}(C(t)).$$

Si $\vec{V} = (V^1, \dots, V^n)$ sont les coordonnées locales de \vec{v} et $C = (C^1, \dots, C^n)$ celles de c alors c est une courbe intégrale de \vec{v} lorsque le système suivant est satisfait :

$$\frac{dC^i}{dt}(t) = V^i(C^1(t), \dots, C^n(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il s'agit là d'un système autonome d'équations différentielles ordinaires auquel on peut appliquer les théorèmes classiques. Puis, revenant à la variété par ϕ^{-1} , on en déduit les résultats suivants :

Théorème 8.1 *Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M .*

1. *Pour tout $m \in M$ il existe une courbe intégrale c de \vec{v} telle que $c(0) = m$,*
2. *Une telle courbe intégrale est de classe C^r ,*
3. *Si c_1 et c_2 sont deux telles courbes alors $c_1 = c_2$ sur l'intersection de leur domaine.*

8.2 Trajectoires maximales, flot intégral

Définition 8.2 *Soit \vec{v} un champ de vecteurs sur M . Une courbe intégrale c de \vec{v} en $m \in M$ définie sur un intervalle ouvert I est maximale si pour toute autre courbe c' en m définie sur un intervalle I' et telle que $I \subset I'$ on a $I' = I$ et $c' = c$.*

Définition 8.3 *Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M . Notons $\mathcal{D}_{\vec{v}} \subset M \times \mathbb{R}$ l'ensemble des $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe une courbe intégrale $c : I \rightarrow M$ avec $c(0) = m$ et $t \in I$. On dit que le champ de vecteur \vec{v} est complet si $\mathcal{D}_{\vec{v}} = M \times \mathbb{R}$. Un point $m \in M$ est σ -complet, avec $\sigma = +, -, \pm$ lorsque $\mathcal{D}_{\vec{v}} \cap (\{m\} \times \mathbb{R})$ contient $\{m\} \times]0, \infty[$, $\{m\} \times]-\infty, 0[$, $\{m\} \times \mathbb{R}$ respectivement.*

Théorème 8.2 *Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M . Alors*

1. $\mathcal{D}_{\vec{v}} \supset M \times \{0\}$,
2. $\mathcal{D}_{\vec{v}}$ est ouvert dans $M \times \mathbb{R}$,
3. *Il existe une unique application de classe C^r , $F_{\vec{v}} : \mathcal{D}_{\vec{v}} \rightarrow M$ telle que, pour tout $m \in M$, l'application $t \rightarrow F_{\vec{v}}(m, t)$ soit la courbe intégrale maximale passant par m .*

Définition 8.4 *Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M . L'application $F_{\vec{v}}$ définie ci-dessus est appelée le flot du champ de vecteur \vec{v} . On le note habituellement*

$$F_{\vec{v}}(m, t) = F_t(m).$$

Théorème 8.3 *Soit $c(t)$ la courbe intégrale maximale qui passe par m et soit I son domaine de définition.*

1. I est ouvert,
2. Notons $I =]T^-(m), T^+(m)[$, si $T^+(m)$ est fini alors $c(t)$ sort de tout compact de M lorsque $t \rightarrow T^+(m)$ (pour tout compact $K \subset M$ il existe $t < T^+(m)$ tel que $c(t) \notin K$),
3. Idem pour $T^-(m)$,
4. Si, pour tout $t \in]T^-(m), T^+(m)[$, $c(t)$ est contenu dans un compact de M , alors $T^-(m) = -\infty$ et $T^+(m) = \infty$.

Corollaire 8.1 *Un champ de vecteur sur une variété compacte est complet.*

Exemple 8.1 (Champ de Rayleigh) Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle. Considérons le champ de vecteurs sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$\vec{v}(x) = (xx^T - I_n)Ax.$$

Vérifions que $\vec{v}(x) \in T_x\mathbb{S}^{n-1} = x^\perp$. On a

$$\langle \vec{v}(x), x \rangle = \langle (xx^T - I_n)Ax, x \rangle =$$

$$\text{Trace}(x^T(xx^T - I_n)Ax) = \text{Trace}(((x^T x)x^T - x^T)Ax) = 0$$

puisque $x^T x = 1$. Considérons une trajectoire $x(t)$ de ce champ de vecteurs. Elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puisque la sphère est compacte. ■

Exemple 8.2 (Champ gravitationnel) Le champ de force déterminé par la loi de gravitation de Newton est donné par

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}\vec{r}$$

où m est la masse du corps étudié, M la masse du corps central, G la constante de gravitation, \vec{r} le rayon vecteur reliant l'origine 0 au point $q = (x, y, z)$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ le module de ce rayon vecteur. Ce champ est défini sur la variété $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Le mouvement d'une particule de masse m dans ce champ est donné par la seconde loi de Newton

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F$$

c'est à dire

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}z.$$

Introduisons le moment $p = m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = F(q).$$

C'est un système d'équations différentielles définies pour $(q, p) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ qui est une variété de dimension 6 appelée l'espace des phases. Notons que le champ de gravitation dérive du potentiel

$$V(q) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

c'est à dire s'écrit $F(q) = -\nabla V(q)$. Introduisons l'énergie du système (énergie cinétique + énergie potentielle) :

$$E(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\|p\|^2}{m} + V(q).$$

Cette énergie est une intégrale première du champ de vecteur c'est à dire que

$$\frac{d}{dt} E(p(t), q(t)) = 0$$

pour toute trajectoire de ce champ (cela se vérifie aisément). Il s'ensuit que toute trajectoire $(p(t), q(t))$ est contenue dans un ensemble de niveau de E : il existe λ tel que $E(p(t), q(t)) = \lambda$. Cet ensemble a pour équation

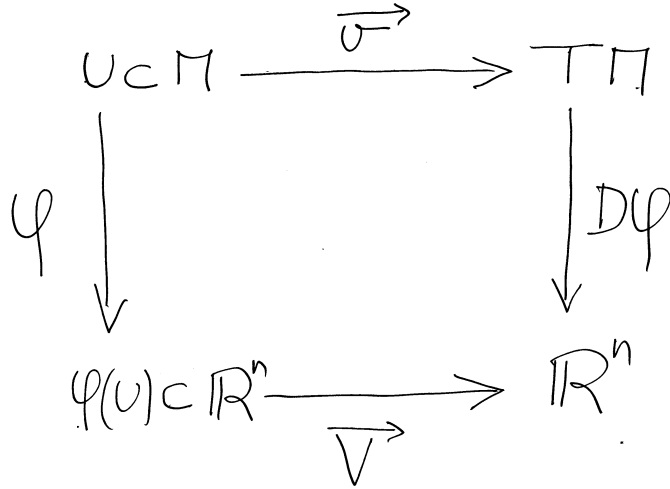
$$\frac{1}{2} \frac{\|p\|^2}{m} - \frac{mMG}{\|q\|} = \lambda.$$

S'il existe des constantes $0 < a < b$ telles que $a \leq \|q(t)\| \leq b$ pour tout t on voit que $V(q(t))$ est borné, donc aussi $p(t)$ et, par le Théorème 8.3, cette trajectoire est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. ■

8.3 Expression du flot en coordonnées locales

Soit \vec{v} un champ de vecteurs sur M et soit (U, ϕ) une carte locale en $m \in M$. L'expression de \vec{v} dans ces coordonnées est donné par le champ $\vec{V} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\vec{V}(x) = D\phi(p)\vec{v}(p), \quad x = \phi(p).$$



Notons $F_t(p) = F(t, p)$ le flot associé à \vec{v} et posons

$$G_t(x) = \phi(F_t(p)), \quad x = \phi(p)$$

ce qui a un sens pourvu que t soit suffisamment petit. On a

$$\frac{d}{dt}G_t(x) = \frac{d}{dt}(\phi(F_t(p))) = D\phi(F_t(p))\frac{d}{dt}F_t(p) = D\phi(F_t(p))\vec{v}(F_t(p)) = \vec{V}(G_t(x)).$$

De plus

$$G_0(x) = \phi(F_0(p)) = \phi(p) = x.$$

Ceci qui prouve que $G_t(x)$ est une courbe intégrale du champ \vec{V} passant par x en $t = 0$. $G_t(x)$ est l'expression du flot $F_t(p)$ dans la carte (U, ϕ) .

8.4 Boîtes de flot

Définition 8.5 Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M . Une boîte de flot de \vec{v} en $m \in M$ est un triplet (U_0, a, F) où

- U_0 est un ouvert de M contenant m , $a > 0$ ou $a = \infty$,
- $F : U_0 \times]-a, a[\rightarrow M$ est de classe C^r ,
- Pour tout $u \in U_0$, $c_u(t) = F(u, t)$ est une courbe intégrale de \vec{v} en u ,
- Pour tout $t \in]-a, a[$, $F(t, U_0)$ est un ouvert de M et $F(t, \cdot)$ est un difféomorphisme de U_0 sur $F(t, U_0)$.

Théorème 8.4 Soit \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r sur M . Pour tout $m \in M$ il existe une boîte de flot de \vec{v} en m . Si (U_0, a, F) et (U'_0, a', F') sont deux telles boîtes alors F et F' sont égales sur $(U_0 \cap U'_0) \times (]-a, a[\cap]-a', a'[/math>.$

8.5 Points singuliers des champs de vecteurs, linéarisation autour d'un point singulier

Définition 8.6 On dit que $m \in M$ est un point singulier (on dit encore point critique ou point d'équilibre) d'un champ de vecteur \vec{v} lorsque $\vec{v}(m) = 0$.

Remarque 8.1 Si l'on note par $F_t(m)$ le flot du champ de vecteur, m est un point critique si et seulement si $F_t(m) = m$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit m est une trajectoire constante du champ de vecteur. ■

Définition 8.7 Lorsque m est un point singulier de \vec{v} , la dérivée de F_t en m est une application linéaire qui envoie $T_m M$ sur lui-même :

$$DF_t(m) : T_m M \rightarrow T_m M.$$

Nous avons donc une application définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R} :

$$t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{L}(T_m M)$$

qui prend ses valeurs dans l'espace des endomorphismes de $T_m M$. La dérivée de cette application en $t = 0$ est une application linéaire que l'on note

$$D\vec{v}(m) : T_m M \rightarrow T_m M, \quad D\vec{v}(m) = \left. \frac{d}{dt} DF_t(m) \right|_{t=0}.$$

$D\vec{v}(m)$ est la linéarisation de \vec{v} en m .

Remarque 8.2 L'expression de $D\vec{v}(m)$ dans un système de coordonnées locales se déduit de celle du flot : par dérivation de

$$G_t(y) = \phi(F_t(p)), \quad y = \phi(p)$$

au point critique m avec $\phi(m) = x$ on obtient

$$DG_t(x) = D\phi(m) DF_t(m) D\phi(m)^{-1}$$

de sorte que, par dérivation par rapport au temps,

$$\left. \frac{d}{dt} DG_t(x) \right|_{t=0} = D\phi(m) \left. \frac{d}{dt} DF_t(m) \right|_{t=0} D\phi(m)^{-1}.$$

Comme $\frac{d}{dt} DG_t(x) = D\vec{V}(x)$ on a prouvé que

$$D\vec{v}(m) = D\phi(m)^{-1} D\vec{V}(x) D\phi(m).$$

Ainsi, la matrice de $D\vec{v}(m)$ dans ce système de coordonnées est $\left(\frac{\partial V^i}{\partial x_j}(x) \right)$ où les V^i sont les coordonnées de \vec{V} . ■

Exemple 8.3 Linéarisé d'un champ de vecteur défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

Pour un champ $\vec{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a par définition du flot

$$\frac{d}{dt}F_t(m) = \vec{v}(F_t(m))$$

d'où, en le point singulier m ,

$$D\vec{v}(m) = \left. \frac{d}{dt}DF_t(m) \right|_{t=0} = D \left. \frac{d}{dt}F_t(m) \right|_{t=0}.$$

Ainsi la définition que l'on vient de donner du linéarisé coïncide avec la définition habituelle de sa dérivée. ■

Exemple 8.4 Linéarisé d'un champ de vecteur défini sur une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Soit $\vec{v} : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ où M est une sous-variété de \mathbb{R}^n . Nous pouvons l'étendre à un voisinage ouvert U de M en un champ $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 8.1) montre que, pour tout $m \in M$, la trajectoire $F_t(m)$ est la restriction à M de la trajectoire $F_t^V(m)$. Il s'ensuit que la dérivée $DF_t(m)$ est la restriction à T_mM de la dérivée $DF_t^V(m)$ et qu'en un point singulier m de \vec{v} on a

$$D\vec{v}(m) = \left. \frac{d}{dt}DF_t(m) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}D^V F_t(m) \right|_{T_mM} \Big|_{t=0} = D \left. \frac{d}{dt}F_t^V(m) \right|_{T_mM} \Big|_{t=0} = D\vec{V}(m) \Big|_{T_mM}.$$

Ainsi le linéarisé $D\vec{v}(m)$ est la restriction à T_mM du linéarisé $D\vec{V}(m)$. ■

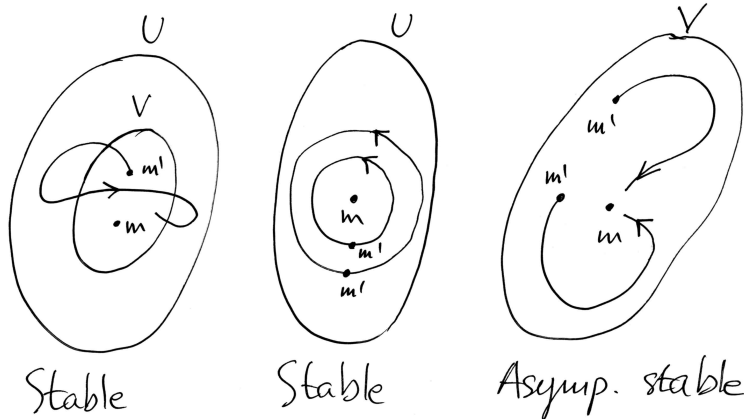
8.6 Stabilité au sens de Liapunov

Définition 8.8 Un point critique m de \vec{v} est stable au sens de Liapunov si pour tout voisinage U de m il existe un voisinage V de m tel que, pour tout $m' \in V$ la trajectoire $F_t(m')$ est définie pour tout $t > 0$ et $F_t(m') \in U$ pour tout $t > 0$. Nous dirons que m est asymptotiquement stable au sens de Liapunov s'il existe un voisinage V de m tel que, pour tout $m' \in V$, la trajectoire $F_t(m')$ est définie et $F_t(m') \in V$ pour tout $t > 0$ et si $\lim F_t(m') = m$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Un point critique asymptotiquement stable m est attractif : les trajectoires du champ de vecteur $F_t(p)$ pour tout p proche de m se dirigent vers m .

Un point critique stable qui n'est pas asymptotiquement stable est donné par $(0, 0)$ pour le champ $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$ de \mathbb{R}^2 .

On définit les critères d'instabilité et d'instabilité asymptotique en "inversant le temps", c'est à dire en prenant $t \rightarrow -\infty$.



Nous allons maintenant donner des critères de stabilité pour les points critiques d'un champ de vecteur; ils sont dus à Liapunov.

Théorème 8.5 (Théorème de stabilité de Liapunov) Si m est un point critique du champ de vecteur \vec{v} et si le spectre de $D\vec{v}(m)$ est contenu dans le demi-plan $\Re(z) < 0$ (resp. $\Re(z) > 0$) alors m est asymptotiquement stable (resp. instable).

Un second critère utilise les "fonctions de Liapunov".

Définition 8.9 Si m est un point critique du champ de vecteur \vec{v} , une fonction $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage ouvert U de m est une fonction de Liapunov pour \vec{v} en m si elle est continue, différentiable sur $U \setminus \{m\}$ et si

1. $L(m) = 0$ et $L(m') > 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$,
2. $DL(m')\vec{v}(m') \leq 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$.

On dit qu'une fonction de Liapunov est stricte si la seconde condition est stricte : $DL(m')\vec{v}(m') < 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$.

Théorème 8.6 Si m est un point critique du champ de vecteur \vec{v} et s'il existe une fonction de Liapunov pour \vec{v} en m alors c'est un point critique stable. S'il existe une fonction de Liapunov stricte alors m est asymptotiquement stable.

Exemple 8.5 Cas linéaire : 0 est un point d'équilibre stable pour $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, lorsque les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives. ■

Exemple 8.6 $\vec{v}(x, y) = (-y - x^5, x - 2y^3)$ sur \mathbb{R}^2 possède un point critique à l'origine. Le champ linéarisé a pour spectre $\pm i$ et l'on ne peut rien conclure du Théorème 8.5.

On cherche alors une fonction de Liapunov du type $L(x, y) = ax^2 + by^2$. On doit avoir $L(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et

$$DL(x, y)\vec{v}(x, y) = -2ax^6 - 4by^4 + 2(b - a)xy \leq 0.$$

Il suffit de prendre $a = b = 1$ pour obtenir une fonction de Liapunov stricte. ■

Exemple 8.7 Reprenons l'exemple 8.2. Le champ correspondant est donné par

$$\vec{v}(q, p) = \left(\frac{p}{m}, F(q) \right)$$

avec $F(q) = -\nabla V(q)$. Soit (q_0, p_0) un point d'équilibre. On a $p_0 = 0$ et $\nabla V(q_0) = 0$. On construit une fonction de Liapunov en prenant

$$L(q, p) = E(q, p) - E(q_0, p_0), \quad E(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q).$$

Il est clair que $L(q_0, p_0) = 0$ et que $DL(q, p)\vec{v}(q, p) = 0$ par conservation de l'énergie. L sera une fonction de Liapunov si $V(q) - V(q_0) > 0$ pour tout q dans un voisinage de q_0 c'est à dire si q_0 est un minimum local strict de V . Dans ce cas le point d'équilibre est stable. ■

8.7 Points singuliers hyperboliques

Nous allons étudier une nouvelle catégorie de points singuliers d'un champ de vecteurs qui généralise les catégories "stables" et "instables" étudiées au paragraphe précédent.

Définition 8.10 Soit m un point critique du champ de vecteur \vec{v} . Ses exposants caractéristiques sont les valeurs propres de $D\vec{v}(m)$. On dit que m est hyperbolique si ses exposants caractéristiques ont tous une partie réelle non nulle.

Si les exposants caractéristiques de m ont une partie réelle négative (resp. positive), m est asymptotiquement stable (resp. instable) comme conséquence du Théorème 8.5. L'exemple 8.6 montre qu'un point critique peut être asymptotiquement stable sans être hyperbolique.

8.7.1 Le cas linéaire

Comme le concept d'hyperbolicité est défini à l'aide du linéarisé de \vec{v} , il est important de bien étudier le cas linéaire. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Le flot associé au système différentiel $\dot{x} = Ax$ est donné par $F_t(x) = e^{tA}x$. Les valeurs propres de e^{tA} sont $e^{\alpha}e^{i\beta}$ où $\lambda = \alpha + i\beta$ est une valeur propre de A . Via une décomposition de Jordan, on voit que

1. $F_t(x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $\Re(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre λ de A ,

2. $F_t(x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ si et seulement si $\Re(\lambda) > 0$ pour toute valeur propre λ de A .

Dans le premier cas $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point singulier stable et dans le second 0 est instable.

Définition 8.11 Regroupons les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ de A avec $\Re(\lambda) < 0$ et procédons de même avec celles dont $\Re(\lambda) > 0$. Les sous-espaces engendrés sont notés $E_s(A)$ et $E_i(A)$, on les appelle sous-espace stable et sous-espace instable.

Les sous-espaces E_s et E_i décomposent l'espace en somme directe : $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_i$. Ils sont invariants par A et donc par le flot intégral : si $x \in E_s$ (resp. E_i) alors $\exp(tA)x \in E_s$ (resp. E_i) pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus la restriction de ce flot à E_s (resp. E_i) est le flot associé à la restriction de A à E_s (resp. E_i) ce qui prouve que $0 \in E_s$ est stable et que $0 \in E_i$ est instable.

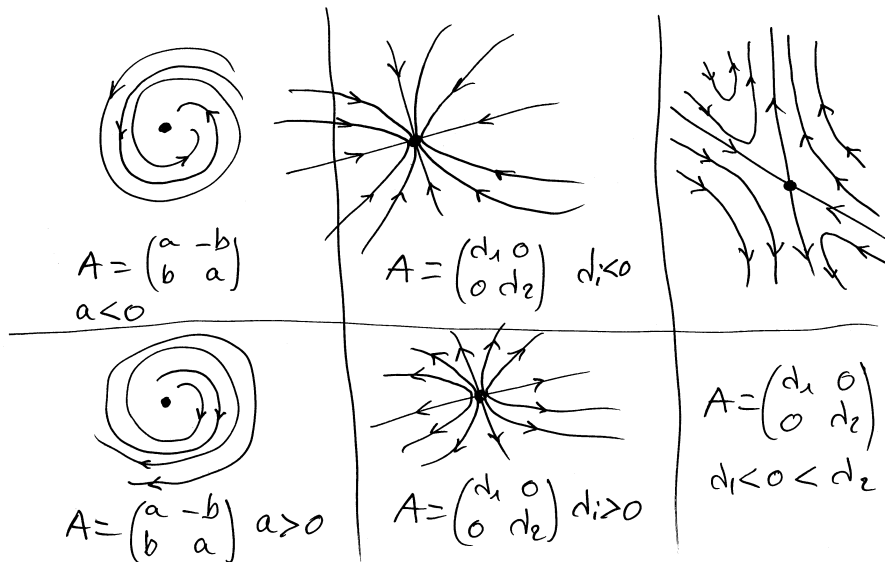


Table 8.1: Endomorphismes hyperboliques du plan

8.7.2 Le cas non-linéaire : le théorème de Grobman-Hartman

Le cas non-linéaire peut se traiter par linéarisation du champ de vecteur au voisinage du point singulier. On obtient alors une théorie locale. Le théorème de Grobman-Hartman montre que localement le champ de vecteur est topologiquement conjugué à son conjugué.

Théorème 8.7 Soit \vec{v} un champ de vecteur et soit $m \in M$ un point singulier hyperbolique de \vec{v} . Soit $D\vec{v}(m) : T_mM \rightarrow T_mM$ le linéarisé de \vec{v} en m . Il existe des voisinages ouverts U de $m \in M$ et V de $0 \in T_mM$ et un homéomorphisme $h : V \rightarrow U$ tel que

$$F_t \circ h = h \circ \exp(tD\vec{v}(m)).$$

Autrement dit, pour tout $x \in V$ et $t \in \mathbb{R}$ si $\exp(tD\vec{v}(m)) \in V$ alors $F_t(h(x))$ est défini et vaut $h(\exp(tD\vec{v}(m))x)$.

Ce théorème montre que, dans le cas hyperbolique, \vec{v} et son linéarisé $D\vec{v}(m)$ ont la même dynamique au voisinage de m . L'homéomorphisme h n'est pas nécessairement de classe C^1 .

8.7.3 Le cas non-linéaire : les variétés stables et instables

Commençons par les définir :

Définition 8.12 Soit M une variété différentiable de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$. Notons \vec{v} un champ de vecteur de classe C^r , $1 \leq r \leq k$ et soit m un point critique de \vec{v} .

1. On appelle variété stable en m (ou variété stable globale) l'ensemble

$$V^s(m) = \left\{ p \in M : F_t(p) \text{ est défini pour tout } t \geq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} F_t(p) = m \right\},$$

2. La variété instable en m (ou variété instable globale) est l'ensemble

$$V^i(m) = \left\{ p \in M : F_t(p) \text{ est défini pour tout } t \leq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} F_t(p) = m \right\}.$$

3. On appelle variété stable locale en m tout ensemble $S \subset M$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) S est une sous-variété différentiable de classe C^r de M et $m \in S$,
- (b) S est tangente en m à $E_s(D\vec{v}(m))$,
- (c) $F_t(S) \subset S$ pour tout $t \geq 0$,
- (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(p) = m$ pour tout $p \in S$.

4. On appelle variété instable locale en m tout ensemble $I \subset M$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) U est une sous-variété différentiable de classe C^r de M et $m \in U$,
- (b) U est tangente en m à $E_i(D\vec{v}(m))$,
- (c) $F_t(U) \subset U$ pour tout $t \leq 0$,
- (d) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_t(p) = m$ pour tout $p \in U$.

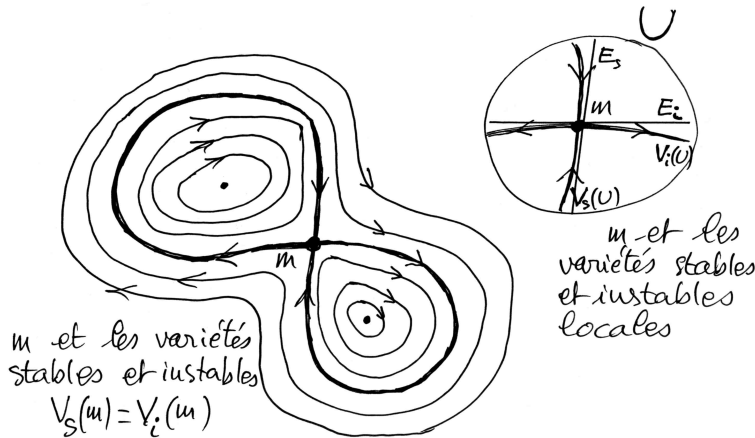


Table 8.2: Les variétés stables et instables

La figure ci-dessus montre que la variété stable n'est pas nécessairement une variété différentiable et que l'intersection de la variété stable avec un voisinage de m n'est pas nécessairement une variété stable locale.

Théorème 8.8 (*Théorème de la variété stable locale*) *Supposons que \vec{v} soit de classe C^r et que m soit un point singulier hyperbolique. Il existe un voisinage U de m tel que*

$$V^s(U) = \{p \in M : F_t(p) \in U \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

soit une variété stable locale en m . De même, il existe un voisinage U' de m tel que

$$V^i(U') = \{p \in M : F_t(p) \in U' \text{ pour tout } t \leq 0\}$$

soit une variété instable locale en m .

Passons maintenant à la structure de la variété stable (globale).

Définition 8.13 1. *On dit qu'une application $g : M \rightarrow N$ est une immersion lorsque $Dg(a) : T_aM \rightarrow T_{g(a)}N$ est injective pour tout $a \in M$.*

2. *On dit que g est un plongement si $g(M)$ est une sous-variété de N et si $g : M \rightarrow g(M)$ est un difféomorphisme,*

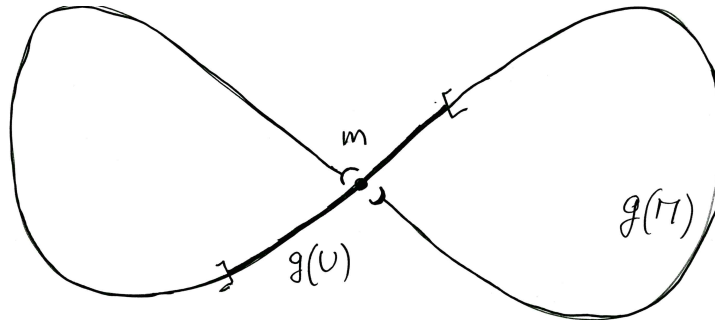
3. *On dit que $V \subset N$ est une variété immergée si c'est l'image d'une variété différentiable par une immersion.*

Contrairement à ce que son nom indique, une variété immergée n'est pas nécessairement une variété différentiable. C'est le cas du lemniscate paramétré par $x(t) = \sin t$, $y(t) = (\sin 2t)/2$, $t \in I =]-\pi, \pi[$ (courbe en huit). L'application $t \in I \rightarrow$

$(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion et elle est injective mais ceci n'empêche pas le lemnicate d'avoir un point double.

Toutefois, on a le résultat suivant :

Théorème 8.9 *Soit $g : M \rightarrow N$ une immersion et soit $V = g(M)$. Pour tout $m \in M$ il existe un voisinage ouvert U de m tel que la restriction de g à U soit un difféomorphisme de U sur $g(U) \subset V$. Aussi, $g(U)$ est une sous-variété de N (voir la figure ci-dessous).*



Le théorème précédent permet de définir un concept d'espace tangent à une variété immergée mais ce n'est pas un concept géométrique, il dépend de la paramétrisation choisie :

Définition 8.14 *Soit $g : M \rightarrow N$ une immersion et soit $V = g(M)$. Pour tout $m \in M$ on définit l'espace tangent à $v = g(m) \in V$ par*

$$T_v V = Dg(m)T_m M.$$

Revenons à la variété stable. Sa structure est donnée par le résultat suivant :

Théorème 8.10 *Supposons que \vec{v} soit de classe C^r et que m soit un point singulier hyperbolique. Soit U un voisinage ouvert de m tel que $V^s(U)$ soit une variété stable locale. Alors*

$$V^s(m) = \cup_{t \leq 0} F_t(V^s(U)).$$

De plus, $V^s(m)$ est une variété immergée : il existe une immersion injective $\phi : E_s(D\vec{v}(m)) \rightarrow M$ telle que

1. $V^s(m) = \phi(E_s(D\vec{v}(m)))$,
2. $\phi(0) = m$ et $Im D\phi(0) = T_m V^s(U) = E_s(D\vec{v}(m))$.

8.8 Exemple : le champ de Rayleigh

Soit A une matrice $n \times n$ réelle et symétrique. Le champ de Rayleigh (voir Exemple 8.1) est défini sur la sphère par

$$\vec{v} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow T\mathbb{S}^{n-1}, \vec{v}(x) = (xx^T - I_n)Ax.$$

Nous allons étudier ses points singuliers.

1. $\vec{v}(x) = 0$ si et seulement si x est un vecteur propre de A (remarquer que $I_n - xx^T$ est la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur x^\perp).
2. Si nous diagonalisons A en base orthonormée, $A = UDU^T$ avec U orthogonale et $D = \text{Diag}(\lambda_i)$, nous voyons que

$$\vec{v}(x) = U\vec{v}_D(y), \quad y = U^T x$$

où \vec{v}_D est défini par $\vec{v}_D(y) = (yy^T - I_n)Dy$. Ainsi, les points singuliers de \vec{v} sont les images par U des points singuliers de \vec{v}_D .

3. Les linéarisés de \vec{v} et de \vec{v}_D sont reliés par

$$D\vec{v}(x) = UD\vec{v}_D(U^T x)U^T.$$

Ainsi les valeurs propres de $D\vec{v}(x)$ et de $D\vec{v}_D(U^T x)$ sont les mêmes et l'on peut supposer que A est diagonale.

4. Avant de calculer ce linéarisé, donnons l'expression de \vec{v} dans une carte locale en x . Une telle carte est donnée par (U, ϕ) avec

$$U = \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle y, x \rangle > 0\}$$

et

$$\phi : U \rightarrow x^\perp, \quad \phi(y) = \frac{y}{\langle y, x \rangle} - x.$$

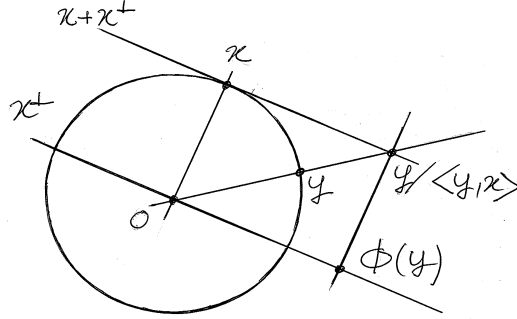


Table 8.3: Une carte locale pour la sphère

L'application inverse est bien sûr

$$\phi^{-1} : x^\perp \rightarrow U, \phi^{-1}(u) = \frac{u + x}{\|x + u\|}.$$

L'expression de \vec{v} dans cette carte est donnée par

$$\vec{V} : x^\perp \rightarrow x^\perp, \vec{V}(u) = D\phi(y)\vec{v}(y), y = \phi^{-1}(u).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$D\phi(y)v = \frac{v \langle y, x \rangle - y \langle v, x \rangle}{|\langle y, x \rangle|^2}, v \in y^\perp,$$

$$D\phi(y)\vec{v}(y) = \frac{(yx^T - x^T y I_n)Ay}{|\langle y, x \rangle|^2}, y \in U,$$

$$\vec{V}(u) = \frac{((u+x)x^T - x^T(u+x)I_n)A(x+u)}{\|u+x\|^2 |\langle y, x \rangle|^2}, u \in x^\perp.$$

5. A étant supposée diagonale, $A = \text{Diag}(\lambda_i)$, nous prenons $x = e_1$ qui est un vecteur propre associé à λ_1 ; x^\perp est engendré par e_2, \dots, e_n et l'expression de \vec{V} devient

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2)u_2 \\ \vdots \\ (\lambda_1 - \lambda_n)u_n \end{pmatrix}.$$

Le linéarisé de \vec{V} en e_1 est donc

$$D\vec{V}(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 - \lambda_n \end{pmatrix}.$$

6. Ceci permet de voir que $x = e_1$ est hyperbolique si et seulement si la valeur propre λ_1 est simple et, dans ce cas, que x est stable lorsque λ_1 est la plus petite valeur propre de A et instable si c'est la plus grande.
7. Lorsque les valeurs propres de A sont simples, les sous-espaces stables associés à e_i et à $-e_i$ sont les ensembles

$$V^s(e_i) = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right) \in \mathbb{S}^{n-1} : u_i > 0 \right\}$$

et

$$V^s(-e_i) = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right) \in \mathbb{S}^{n-1} : u_i < 0 \right\}.$$

Pour démontrer que l'ensemble ci-dessus est contenu dans la variété stable de e_i il suffit d'utiliser l'expression de \vec{v} dans la carte locale décrite précédemment. Pour démontrer qu'il y a égalité il suffit de remarquer que la réunion de tous ces ensembles est égale à la sphère.

9. La méthode du gradient

9.1 Structures riemanniennes

Définition 9.1 Soit M une variété différentiable de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ ou analytique. Une structure riemannienne sur M est la donnée d'un produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_m : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbb{R}$$

sur chaque espace tangent $T_m M$ tel que l'application

$$m \in M \rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_m$$

soit de classe C^k . On dit alors que M est une variété riemannienne.

L'application $m \in M \rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_m$ prend ses valeurs dans le fibré des formes bilinéaires symétriques sur TM . Elle est de classe C^k lorsque pour tout $m \in M$ et pour toute carte locale (U, ϕ) en m le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur \mathbb{R}^n donné par

$$\langle u, v \rangle_x = \langle D\phi(m)^{-1}u, D\phi(m)^{-1}v \rangle_m$$

où $x = \phi(m)$ est une application de classe C^k de $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ dans l'espace des formes bilinéaires symétriques sur \mathbb{R}^n .

Exemple 9.1 Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^{k+2} . Supposons que la matrice hessienne $H(x)$ de h en x soit définie positive pour tout $x \in U$. Alors

$$\langle u, v \rangle_x = \langle u, H(x)v \rangle$$

définit une structure riemannienne de classe C^k sur U . Cet exemple est au coeur de l'étude des méthodes de points intérieurs en programmation linéaire. ■

Exemple 9.2 Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n . La restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^n à $T_m M$ définit une structure riemannienne sur M . ■

9.2 Le gradient

Notons E un espace euclidien, $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ son produit scalaire et soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert U de E . Le gradient de g en $x \in U$ est défini par

$$Dg(x)u = \langle \nabla g(x), u \rangle_E$$

pour tout $u \in E$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique on a :

$$Dg(x)u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} u_i, \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

On étend cette définition à une fonction définie sur une variété riemannienne de la façon suivante :

Définition 9.2 Soit M une variété riemannienne et soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Le gradient de f en m est l'unique vecteur $\nabla f(m) \in T_m M$ (encore noté $\text{grad } f(x)$) tel que

$$Df(m)u = \langle \nabla f(m), u \rangle_m, \quad u \in T_m M.$$

Exemple 9.3 Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n équipée de la structure riemannienne induite. Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un voisinage ouvert de M dans \mathbb{R}^n et soit f la restriction de g à M . Alors

$$\nabla f(x) = \Pi_{T_x M} \nabla g(x)$$

où $\Pi_{T_x M}$ désigne la projection orthogonale sur l'espace tangent. ■

Exemple 9.4 Nous avons déjà rencontré le champ de Rayleigh défini sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} par

$$\vec{v}(x) = (xx^T - I_n)Ax.$$

Il est facile de voir que $\vec{v}(x) = -\nabla f(x)$ avec

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax.$$

■

Proposition 9.1 (Expression du gradient à l'aide d'une carte locale) Soit (U, ϕ) une carte locale en m . Notons

$$g : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = g \circ \phi \quad \text{et} \quad x = \phi(m).$$

1. La représentation locale du champ de vecteurs ∇f est donnée par

$$\vec{V}(x) = D\phi(m)\nabla f(m), \quad x = \phi(m),$$

2. Les gradients de f en m et de g en x sont reliés par

$$\nabla f(m) = D\phi(m)^* \nabla g(x)$$

où $D\phi(m)^*$ désigne l'application adjointe relative aux structures euclidiennes $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ sur $T_m M$ et canonique sur \mathbb{R}^n ,

3. Lorsque $D\phi(m)$ est une isométrie, c'est à dire lorsque

$$\langle D\phi(m)u, D\phi(m)v \rangle = \langle u, v \rangle_m$$

pour tout u et $v \in T_m M$, on a

$$\vec{V}(x) = \nabla g(x).$$

Démonstration. La première assertion est une définition donnée au Paragraphe 8.1. Pour prouver la seconde assertion notons que

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(m), u \rangle_m &= Df(m)u = Dg(x)D\phi(m)u = \\ &= \langle \nabla g(x), D\phi(m)u \rangle = \langle D\phi(m)^* \nabla g(x), u \rangle_m. \end{aligned}$$

La troisième identité est une conséquence des deux premières lorsque $D\phi(m)$ est une isométrie. ■

9.3 Le hessien

Pour une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , définie sur un ouvert d'un espace euclidien, on définit le hessien de g en $x \in U$ comme l'opérateur linéaire symétrique qui vérifie

$$\text{Hess } g(x) : E \rightarrow E, \quad D^2g(x)(u, v) = \langle \text{Hess } g(x)u, v \rangle_E$$

pour tout $u, v \in E$. Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique on a :

$$D^2g(x)(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j \text{ et } \text{Hess } g(x) = \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Observons l'effet d'un changement de coordonnées : posons $x = \psi(y)$ où ψ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n . On a :

$$D^2(g \circ \psi)(y)(r, s) = D^2g(\psi(y))(D\psi(y)r, D\psi(y)s) + Dg(\psi(y))D^2\psi(y)(r, s)$$

pour tout $r, s \in \mathbb{R}^n$ de sorte que

$$D^2(g \circ \psi)(y)(r, s) = D^2g(\psi(y))(D\psi(y)r, D\psi(y)s)$$

en un point critique de g . La dérivée seconde en un tel point est indépendante du choix d'un système de coordonnées. On va par ce biais définir la dérivée seconde et le hessien en un point critique d'une fonction définie sur une variété riemannienne :

Proposition 9.2 Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $m \in M$ un point critique de f c'est à dire tel que $Df(m) = 0$. La dérivée seconde de f en m est la forme bilinéaire symétrique définie via une carte locale (U, ϕ) en m par

$$D^2f(m) : T_mM \times T_mM \rightarrow \mathbb{R}, \quad D^2f(m)(u, v) = D^2g(x)(D\phi(m)u, D\phi(m)v),$$

où $g = \phi^{-1} \circ f$ et $x = \phi(m)$. Cette définition ne dépend pas de la carte choisie.

Démonstration. Prenons deux cartes en m : ϕ_1 et ϕ_2 et posons $x_i = \phi_i(m)$, $g_i = f \circ \phi_i^{-1}$ et $\psi = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$. On a : $x_1 = \psi(x_2)$, $g_2 = g_1 \circ \psi$ et

$$D\psi(x_2) = D\phi_1(m)D\phi_2(m)^{-1}.$$

Nous devons prouver que

$$D^2g_1(x_1)(D\phi_1(m)u, D\phi_1(m)v) = D^2g_2(x_2)(D\phi_2(m)u, D\phi_2(m)v)$$

pour tout $u, v \in T_mM$ lorsque $Df(m) = 0$. L'égalité précédente devient, avec $r = D\phi_2(m)u$ et $s = D\phi_2(m)v$,

$$D^2g_1(\psi(x_2))(D\psi(x_2)r, D\psi(x_2)s) = D^2(g_1 \circ \psi)(x_2)(r, s)$$

lorsque $Dg(x_1) = 0$ et l'on conclut par la remarque ci-dessus. ■

Définition 9.3 On définit le hessien de f en $m \in M$ lorsque $Df(m) = 0$ comme l'opérateur linéaire symétrique qui vérifie

$$\text{Hess } f(m) : T_mM \rightarrow T_mM, \quad D^2f(m)(u, v) = \langle \text{Hess } f(m)u, v \rangle_m$$

pour tout $u, v \in T_mM$.

Proposition 9.3 (Expression du hessien à l'aide d'une carte locale) Soit m un point critique de f et soit (U, ϕ) une carte locale en m . Notons

$$g : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f = g \circ \phi \text{ et } x = \phi(m).$$

1. Le linéarisé du champ de gradient en m est

$$D(\nabla f)(m) = \text{Hess } f(m),$$

2. Les hessiens de f en m et de g en x sont reliés par

$$\text{Hess } f(m) = D\phi(m)^* \text{Hess } g(x) D\phi(m),$$

3. Lorsque $D\phi(m)$ est une isométrie, $\text{Hess } g(x)$ et $\text{Hess } f(m)$ sont des opérateurs linéaires semblables :

$$\text{Hess } f(m) = D\phi(m)^{-1} \text{Hess } g(x) D\phi(m).$$

Démonstration. La représentation de Hess $f(m)$ dans la carte (U, ϕ) dérive de l'identité

$$D^2 f(m)(u, v) = D^2 g(x)(D\phi(m)u, D\phi(m)v), \quad x = \phi(m).$$

On obtient

$$\langle \text{Hess } f(m)u, v \rangle_m = \langle \text{Hess } g(x)D\phi(m)u, D\phi(m)v \rangle = \langle D\phi(m)^* \text{Hess } g(x)D\phi(m)u, v \rangle_m$$

et donc

$$\text{Hess } f(m) = D\phi(m)^* \text{Hess } g(x)D\phi(m).$$

D'autre part la linéarisation de ∇f en m et celle de $\vec{V}(x) = D\phi(m)\nabla f(m)$ sont reliées par (voir Paragraphe 8.5)

$$D\nabla f(m) = D\phi(m)^{-1}D\vec{V}(x)D\phi(m).$$

Comme ici

$$\vec{V}(x) = D\phi(m)\nabla f(m) = D\phi(m)D\phi(m)^*\nabla g(x)$$

on obtient

$$D\vec{V}(x) = D\phi(m)D\phi(m)^*\text{Hess } g(x)$$

d'où

$$D\nabla f(m) = D\phi(m)^*\text{Hess } g(x)D\phi(m) = \text{Hess } f(m). \blacksquare$$

Remarque 9.1 *La loi d'inertie de Sylvester montre que le nombre de valeurs propres positives (resp. négatives, resp. nulles) de Hess $f(m)$ et de Hess $g(x)$ sont les mêmes. Ainsi ces deux opérateurs sont simultanément définis positifs. \blacksquare*

9.4 Propriétés des trajectoires du champ de gradient

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Parce que l'on préfère minimiser que maximiser, on va s'intéresser aux trajectoires de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$$

qui va nous permettre de "pointer" vers les minimums locaux de f . Les propriétés de ses trajectoires sont résumées dans la série de propositions suivantes :

Proposition 9.4 *Les points singuliers du champ de vecteurs $-\nabla f$ sont les points critiques de f .*

Proposition 9.5 *Hors des points singuliers, les trajectoires du champ sont perpendiculaires aux ensembles de niveau : si $f(m) = \lambda$ et si $-\nabla f(m) \neq 0$ il existe un voisinage ouvert U de m dans M tel que*

$$V = U \cap \{p : f(p) = \lambda\}$$

soit une sous-variété différentiable de M et, pour tout $u \in T_m V$,

$$\langle -\nabla f(m), u \rangle = 0.$$

Démonstration. Lorsque $f(m) = \lambda$ et $\nabla f(m) \neq 0$, $Df(m) : T_m M \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective ce qui fait de V une sous-variété de M pour un U assez petit (voir la définition 4.3 et l'exemple 3.3). L'espace tangent en m est $T_m V = \text{Ker } Df(m)$ de sorte que $\langle \nabla f(m), u \rangle_m = 0$ pour tout $u \in T_m V$. ■

Proposition 9.6 *Pour toute trajectoire $x(t)$ de cette équation on a*

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = - \|\nabla f(x(t))\|_{x(t)}^2.$$

Aussi f est strictement décroissante le long de toute trajectoire qui ne contient pas de point critique.

Démonstration. $\frac{d}{dt} f(x(t)) = Df(x(t))\dot{x}(t) = \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t) \rangle_{x(t)} = - \|\nabla f(x(t))\|_{x(t)}^2$. ■

Proposition 9.7 *Pour toute trajectoire $x(t)$ définie pour tout $t \geq 0$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = -\infty$ ou bien $\lim_{t \rightarrow \infty} \nabla f(x(t)) = 0$.*

Démonstration. Puisque la fonction $f(x(t))$ est décroissante, sa limite lorsque $t \rightarrow \infty$ est égale à $-\infty$ ou bien à $f_\infty > -\infty$. Dans ce dernier cas on a

$$0 \leq f(x(0)) - f_\infty = \int_0^\infty -\frac{d}{dt} f(x(t)) dt = \int_0^\infty \|\nabla f(x(t))\|_{x(t)}^2 dt < \infty.$$

Puisque cette intégrale est convergente on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \nabla f(x(t)) = 0$. ■

Proposition 9.8 *Si pour une suite (t_k) de nombres réels telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ on a $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = z$ alors $\nabla f(z) = 0$.*

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition précédente. ■

Un cas particulier intéressant est celui des fonctions "inf-compactes" :

Définition 9.4 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est inf-compacte lorsque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$f^{\leq \lambda} = \{x \in M : f(x) \leq \lambda\}$$

est compact.

Proposition 9.9 *Lorsque f est inf-compacte toute trajectoire $x(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et possède des points limites $z \in M$ (qui vérifient, par la proposition précédente, $\nabla f(z) = 0$.)*

Démonstration. Puisque $f(x(t))$ est décroissante, la trajectoire $x(t)$ est contenue dans $f^{\leq \lambda}$, $\lambda = f(x(0))$, qui est un ensemble compact. On conclut avec le Théorème 8.3 et la proposition précédente. ■

9.5 Gradient, hessien et optimisation

La classification des points singuliers du champ $-\nabla f(x)$ est donnée, peu ou prou, par le "dictionnaire" suivant : stable = minimum local, instable = maximum local, hyperbolique = point selle. Précisons cela.

Théorème 9.1 *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .*

1. *Lorsque $m \in M$ est un minimum local de f alors $Df(m) = 0$ et $D^2f(m)$ est semi-définie positive,*
2. *Lorsque $Df(m) = 0$ et que $D^2f(m)$ est définie positive, m est un minimum local strict,*
3. *On a un énoncé similaire pour les maximums locaux.*

Démonstration. Via une carte locale on se ramène au cas d'une fonction réelle définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n à laquelle on applique les résultats classiques de l'optimisation sans contrainte. ■

Théorème 9.2 *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .*

1. *Lorsque $m \in M$ est un minimum local strict de f alors $p \rightarrow f(p) - f(m)$ est une fonction de Liapunov et m est un point d'équilibre stable du champ $-\nabla f(m)$.*
2. *Si $m \in M$ est un minimum local strict de f et un point singulier isolé du champ $-\nabla f(m)$ alors $p \rightarrow f(p) - f(m)$ est une fonction de Liapunov stricte et m est un point d'équilibre asymptotiquement stable de ce champ.*
3. *Un maximum local strict $m \in M$ de f est un point d'équilibre instable du champ $-\nabla f(m)$.*
4. *Si $m \in M$ est un maximum local strict de f et un point singulier isolé du champ de gradient alors m est un point d'équilibre asymptotiquement instable du champ $-\nabla f(m)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 9.6 et du théorème 8.6. ■

On obtient des propriétés globales du champ $-\nabla f(m)$ en supposant que f est une fonction de Morse inf-compacte. Voici un énoncé en ce sens :

Théorème 9.3 *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Supposons que*

1. *f est une fonction de Morse : en tout point stationnaire m de f le hessien $\text{Hess } f(m)$ est un isomorphisme de $T_m M$,*
2. *Les points stationnaires de f sont isolés,*
3. *f est inf-compacte,*

alors, les trajectoires du champ $-\nabla f$ vérifient :

1. Elles sont définies pour tout $t \geq 0$,
2. Lorsque $t \rightarrow \infty$ elles convergent vers un point stationnaire de f ,
3. M est réunion des variétés stables de ces points stationnaires :

$$M = \cup_{\nabla f(m)=0} W^s(m),$$

4. Ce sont des sous-variétés plongées et $\dim W^s(m) = n_+$ le nombre de valeurs propres positives de Hess $f(m)$.

9.6 Approximation du champ de gradient

Nous ne parlerons ici que de deux méthodes d'approximation des trajectoires de l'équation

$$\dot{m} = -\nabla f(m).$$

Lorsque M est un ouvert de \mathbb{R}^n (on écrit la variable x au lieu de m) on dispose de deux algorithmes classiques qui sont fondés sur la méthode d'Euler et la méthode d'Euler implicite. Ils sont donnés par les schémas

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$$

pour le premier; $t_k > 0$ est ici le pas de discrétisation. Il est le plus souvent constant, voire égal à 1. Le second est

$$x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_{k+1}),$$

c'est le schéma implicite. Il est plus compliqué à implémenter que le schéma explicite mais, en principe, il offre plus de stabilité. Les algorithmes correspondants sont appelés "méthode du gradient" et "méthode proximale".

Lorsque f est définie sur une variété différentiable, l'expression $x - t \nabla f(x)$ n'a plus de sens puisqu'elle ajoute un vecteur $(-t \nabla f(x))$ à un point pris sur la variété (x) et qu'une telle addition n'est pas définie. On lui substitue donc une autre opération que nous allons maintenant définir.

Définition 9.5 Soit M une variété différentiable. On appelle rétraction toute application $\mathcal{R} : TM \rightarrow M$ qui vérifie les trois propriétés suivantes (on note \mathcal{R}_m la restriction de \mathcal{R} à $T_m M$) :

1. \mathcal{R}_m est définie et de classe C^1 sur un voisinage ouvert B_m de 0 dans $T_m M$,
2. $\mathcal{R}_m(u) = m$ si et seulement si $u = 0$,
3. $D\mathcal{R}_m(0) = id_{T_m M}$.

Les exemples les plus classiques de rétractions sont donnés par :

Exemple 9.5 1. $M = E$ un espace normé et $\mathcal{R}_x(u) = x + u$.

2. $M \subset E$ est une sous-variété dans un espace normé et

$$\mathcal{R}_x(u) = \operatorname{argmin}_{y \in M} \|x + u - y\|,$$

3. $M \subset E$ est une sous-variété dans un espace euclidien et $y = \mathcal{R}_x(u)$ est la solution du système

$$x + u - y \in (T_x M)^\perp, \quad y \in M,$$

4. $M \subset E$ est la sous-variété de l'espace euclidien E définie par l'équation $F(x) = 0$ où $F : E \rightarrow G$ est de classe C^1 et $DF(x)$ est surjective pour tout $x \in M$. On pose

$$\mathcal{R}_x(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} N_F^k(x + u)$$

où $N_F(x) = x - DF(x)^\dagger F(x)$ est l'opérateur de Newton.

5. M est une variété riemannienne et $\mathcal{R}_m(u) = \exp_m(u)$ (l'application exponentielle $TM \rightarrow M$),

6. M est une variété différentiable, (U, ϕ) est une carte locale en m et

$$\mathcal{R}_m(u) = \phi^{-1}(\phi(m) + D\phi(m)u),$$

7. $M = \mathbb{S}^{n-1}$ et $\mathcal{R}_x(u) = \frac{x + u}{\|x + u\|}$.

■

La méthode du gradient et la méthode proximale deviennent dans ce cadre

$$x_{k+1} = \mathcal{R}_{x_k}(-t_k \nabla f(x_k)) \text{ et } x_k = \mathcal{R}_{x_{k+1}}(t_k \nabla f(x_{k+1})).$$

L'étude de ces méthodes reste à faire.

9.7 Exemple : moindres carrés non-linéaires

Soit M une variété riemannienne et soit $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^2 . Le problème des moindres carrés est l'étude du problème d'optimisation

$$\inf_{m \in M} \frac{1}{2} \|F(m)\|^2.$$

Il est clair que tout zéro de F est une solution de ce problème. Notons

$$f(m) = \frac{1}{2} \|F(m)\|^2.$$

Nous allons prouver que

Théorème 9.4 *Les points stationnaires de f sont les solutions de l'équation*

$$DF(m)^*F(m) = 0.$$

Le hessien de f en un point stationnaire m est égal à

$$\text{Hess } f(m) = D^2F(m)^*F(m) + DF(m)^*DF(m).$$

Remarque 9.2 1. *La dérivée seconde $D^2F(m)$ est définie à l'aide d'une carte locale (U, ϕ) en m comme cela a été fait au paragraphe 9.3 : on pose*

$$G : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m, F = G \circ \phi$$

puis

$$D^2F(m) : T_mM \times T_mM \rightarrow \mathbb{R}^m, D^2F(m)(u, v) = D^2G(\phi(m))(D\phi(m)u, D\phi(m)v).$$

Cette définition dépend de la carte locale (U, ϕ) en m . Par contre, l'expression

$$\langle D^2F(m)(u, v), F(m) \rangle$$

est indépendante du choix de la carte en m . Ceci permet de définir un opérateur linéaire

$$D^2F(m)^*F(m) : T_mM \rightarrow T_mM, D^2F(m)^*F(m)v = (D^2F(m)(\cdot, v))^*F(m).$$

Cet opérateur est symétrique et

$$\langle u, D^2F(m)^*F(m)v \rangle_m = \langle D^2F(m)(u, v), F(m) \rangle.$$

2. *Lorsque $DF(m)$ est injective et que $F(m)$ est assez petit, le hessien de f en m est défini positif et donc m est un minimum local strict de f .*

■

Démonstration. Tout d'abord,

$$Df(m) = \langle DF(m)u, F(m) \rangle = \langle u, DF(m)^*F(m) \rangle_m$$

d'où la première assertion. Passons à la construction de $D^2F(m)^*F(m)$. Prenons deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) en m et posons $\psi = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$, $F = G_1 \circ \phi_1 = G_2 \circ \phi_2$ de sorte que $G_2 = G_1 \circ \psi$. On a

$$\begin{aligned} D^2G_2(\phi_2(m))(D\phi_2(m)u, D\phi_2(m)v) &= D^2G_1(\phi_1(m))(D\phi_1(m)u, D\phi_1(m)v) + \\ &DG_1(\phi_1(m))D^2\psi(\phi_2(m))(D\phi_2(m)u, D\phi_2(m)v). \end{aligned}$$

Lorsque $DF(m)^*F(m) = 0$ on a aussi $DG_1(\phi_1(m))^*G_1(\phi_1(m)) = 0$ et donc

$$\langle D^2G_2(\phi_2(m))(D\phi_2(m)u, D\phi_2(m)v), G_2(\phi_2(m)) \rangle =$$

$$\langle D^2G_1(\phi_1(m))(D\phi_1(m)u, D\phi_1(m)v), G_1(\phi_1(m)) \rangle.$$

Pour obtenir l'expression de $D^2f(m)$ on part de la définition donnée au paragraphe 9.3 :

$$D^2f(m)(u, v) = D^2g(\phi(m))(D\phi(m)u, D\phi(m)v).$$

On remarque ensuite que

$$D^2g(x)(r, s) = \langle D^2G(x)(r, s), G(x) \rangle + \langle DG(x)r, DG(x)s \rangle$$

de sorte que

$$\begin{aligned} D^2f(m)(u, v) &= \langle D^2G(\phi(m))(D\phi(m)u, D\phi(m)v), G(\phi(m)) \rangle + \\ &\quad \langle DG(\phi(m))D\phi(m)u, DG(\phi(m))D\phi(m)v \rangle = \\ &\quad \langle D^2F(m)(u, v), F(m) \rangle + \langle DF(m)u, DF(m)v \rangle = \\ &\quad \langle u, D^2F(m)^*F(m)v \rangle_m + \langle u, DF(m)^*DF(m)v \rangle_m. \blacksquare \end{aligned}$$

9.8 Exemple : le problème de Procrustes

Etant donné deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $m \geq n$, le problème de Procrustes consiste à trouver une matrice orthogonale $X \in \mathbb{O}_n$ telle que $AX = B$.

Si l'on suppose que $\text{Rang } A = n$, une telle matrice X existe si et seulement si $AA^T = BB^T$. En effet si $AX = B$ avec X orthogonale on a $AA^T = (AX)(X^T A^T) = BB^T$.

Réciproquement, si $AA^T = BB^T$, posons $X = (A^T A)^{-1} A^T B$. Cette définition est licite puisque $\text{Rang } A = n$. On a

$$XX^T = (A^T A)^{-1} A^T B B^T A (A^T A)^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T A A^T A (A^T A)^{-1} = I_n$$

donc X est orthogonale. De plus, en notant $\Pi_{\text{Im } A}$ la projection orthogonale sur $\text{Im } A$, on a

$$AX = A(A^T A)^{-1} A^T B = \Pi_{\text{Im } A} B = B$$

puisque l'hypothèse $AA^T = BB^T$ et celle sur le rang de A impliquent l'égalité $\text{Im } A = \text{Im } B$.

Il est donc clair que, pour deux matrices A et B prises au hasard, l'égalité $AX = B$ n'a pas lieu. C'est la raison pour laquelle on parle de problème de Procrustes pour un ajustement qui ne tombe jamais exactement.

Dans la mythologie grecque, Procrustes (en grec ancien "Prokroustês", littéralement "qui martèle pour allonger") est le surnom d'un brigand de l'Attique, nommé Polypémon ou Damastès. Il résidait à Corydalle selon Diodore de Sicile, où il capturait les voyageurs et les torturait ainsi : il les allongeait sur un lit de fer, où ils devaient tenir exactement ; s'ils étaient trop grands, il coupait les membres qui dépassaient ; s'ils étaient trop petits, il les étirait jusqu'à ce qu'ils atteignent la taille requise (d'où son surnom). Procuste fut tué par Thésée, qui lui fit subir le même sort.

Puisque l'équation $AX = B$ a peu de chance d'avoir une solution, on est conduit à adopter une stratégie du type "moindres carrés" et l'on considère le problème

$$\min_{X \in \mathbb{O}_n} \|AX - B\|_F^2$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius. Soit $A^T B = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières de $A^T B$: U et V sont des matrices orthogonales et $\Sigma = \text{Diag}(\sigma)$ avec $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Proposition 9.10 *$X = UV^T$ est une solution du problème de Procrustes. Lorsque $A^T B$ est inversible, cette solution est unique.*

Démonstration. Comme $\|AX - B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2\langle X, A^T B \rangle_F$ on doit maximiser $\langle X, A^T B \rangle_F$ sur \mathbb{O}_n . Notons que

$$\langle X, A^T B \rangle_F = \langle X, U\Sigma V^T \rangle_F = \langle U^T X V, \Sigma \rangle_F = \langle Y, \Sigma \rangle_F = \sum_{i=1}^n y_{ii} \sigma_i$$

où $Y = U^T X V$. Comme Y est orthogonale on a $y_{ii} \leq 1$ de sorte que

$$\langle Y, \Sigma \rangle_F \leq \sum_{i=1}^n y_{ii} \sigma_i$$

avec égalité si $y_{ii} = 1$ pour tout i c'est à dire si $Y = I_n$ (d'où $X = UV^T$). Lorsque $\sigma_i > 0$ pour tout i il est facile de voir que l'inégalité précédente est stricte pour toute matrice orthogonale $Y \neq I_n$. ■

Proposition 9.11 *Soit $f : \mathbb{O}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) = \|AX - B\|_F^2$. Alors*

$$\nabla f(X) = XB^T AX - A^T B.$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord que l'espace tangent au groupe orthogonal est donné par

$$T_X \mathbb{O}_n = \{CX : C^T = -C\}$$

(voir paragraphe 3.2) et que la projection orthogonale de $\mathbb{R}^{n \times n}$ sur $T_X \mathbb{O}_n$ est égale à

$$\Pi_{T_X \mathbb{O}_n} Z = \frac{1}{2}(Z - XZ^T X).$$

En effet $Z \rightarrow ZX^T$ est une isométrie de $\mathbb{R}^{n \times n}$, $T_X \mathbb{O}_n = (T_{I_n} \mathbb{O}_n)X$ et $\Pi_{T_{I_n} \mathbb{O}_n} Z = \frac{1}{2}(Z - Z^T)$.

La dérivée de f en X est donnée par $Df(X) : T_X \mathbb{O}_n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} Df(X)Y &= 2\langle AX - B, AY \rangle_F = 2\langle A^T AX - A^T B, Y \rangle_F \\ &= 2\langle \Pi_{T_X \mathbb{O}_n}(A^T AX - A^T B), Y \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\nabla f(X) = 2\Pi_{T_X \mathbb{O}_n}(A^T AX - A^T B) = XB^T AX - A^T B. \blacksquare$$

Proposition 9.12 *On a $\nabla f(X) = 0$ si et seulement si $A^T B X^T$ est une matrice symétrique. De plus, si $\sigma_1 > \dots > \sigma_n$, $\nabla f(X) = 0$ si et seulement si $X = UTV^T$ avec $T \in \mathbb{T}_n$ (matrices du type $T = \text{Diag}(\varepsilon_i)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$).*

Démonstration. Si $A^T B X^T$ est symétrique on a $X B^T A X - A^T B = A^T B X^T X - A^T B = 0$. La réciproque est immédiate.

Pour la seconde assertion, si $X = UTV^T$ avec $T \in \mathbb{T}_n$ on a

$$A^T B X^T = U \Sigma V^T V T U^T = U \Sigma T U^T$$

qui est symétrique. Réciproquement, si $A^T B X^T = U \Sigma V^T X^T U U^T$ est symétrique, posons $Y = V^T X^T U$. La matrice ΣY est symétrique et Y est orthogonale. Nous allons voir que cela implique que Y est diagonale et donc que $Y \in \mathbb{T}_n$. La symétrie donne $\sigma_i y_{ij} = \sigma_j y_{ji}$ pour tout i, j . En élevant au carré et en sommant sur j , puisque Y est orthogonale, on obtient

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 y_{ji}^2$$

pour tout i et en particulier

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 y_{j1}^2.$$

Comme $\sum_{j=1}^n y_{j1}^2 = 1$ et que $\sigma_1 > \sigma_j$ pour tout $j > 1$ cette inégalité implique $y_{11}^2 = 1$ et $y_{j1}^2 = 0$ pour tout $j > 1$. Ainsi $y_{11} = \pm 1$ et $y_{j1} = 0$ pour tout $j > 1$. On passe ensuite à la ligne y_{j2} et ainsi de suite. ■

Proposition 9.13 *Lorsque $\sigma_1 > \dots > \sigma_n$, les valeurs propres du hessien $\text{Hess } f(X)$ en $X = UTV^T$, $T = \text{Diag}(\varepsilon_i)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, sont égales à $\varepsilon_i \sigma_i + \varepsilon_j \sigma_j$, $1 \leq i < j \leq n$.*

Démonstration. Pour effectuer ce calcul nous allons supposer que A est une matrice diagonale. Justifions cette réduction. Considérons le problème

$$\min_{Y \in \mathbb{O}_n} \|Y - \Sigma\|_F^2$$

auquel on associe la fonction $g(Y) = \|Y - \Sigma\|_F^2$ dont le gradient est $\nabla g(Y) = Y \Sigma Y - \Sigma$. Posons $X = UYV^T$. La proposition 9.11 prouve que

$$\nabla g(Y) = U^T \nabla f(X) V.$$

Par dérivation par rapport à la variable Y on obtient, pour tout $\dot{Y} \in T_T \mathbb{O}_n$,

$$D(\nabla g(Y)) \dot{Y} = U^T D(\nabla f(X))(U \dot{Y} V^T) V = (U^T D(\nabla f(X)) U) \dot{Y}.$$

Ce calcul prouve que (voir la Remarque 8.4) que les hessiens $\text{Hess } f(X)$ et $\text{Hess } g(Y)$ sont semblables.

Avec $X = UTV^T$, $Y = T$ et $\dot{Y} = CT \in T_T \mathbb{O}_n$ où $C^T = -C$ on a

$$\text{Hess } g(Y) \dot{Y} = \dot{Y} \Sigma T + T \Sigma \dot{Y} = CT \Sigma T + T \Sigma CT = C \Sigma + T \Sigma CT$$

qui est la matrice de terme général

$$c_{ij}\sigma_j + \varepsilon_i c_{ij}\sigma_i \varepsilon_j = c_{ij}\varepsilon_j(\varepsilon_j\sigma_j + \varepsilon_i\sigma_i).$$

Nous en déduisons que

$$\text{Hess } g(Y)(C^{ij}T) = C^{ij}T(\varepsilon_j\sigma_j + \varepsilon_i\sigma_i)$$

pour tout $1 \leq i < j \leq n$ où C^{ij} est la matrice antisymétrique dont l'entrée ij vaut 1, l'entrée ji vaut -1 et toutes les autres 0. Les matrices $C^{ij}T$, $1 \leq i < j \leq n$, constituent une base de $T_T\mathbb{O}_n$; on a donc trouvé toutes les valeurs propres de $\text{Hess } g(Y)$ et, de ce fait, toutes celles de $\text{Hess } f(X)$. ■

Corollaire 9.1 *Lorsque $\sigma_1 > \dots > \sigma_n$, le seul point singulier asymptotiquement stable du champ de vecteurs $-\nabla f$ est $X = UV^T$. $X = -UV^T$ est asymptotiquement instable et les autres points singuliers sont hyperboliques.*

Démonstration. Les valeurs propres du champ $-\nabla f$ en $X = UTV^T$, $T = \text{Diag}(\varepsilon_i)$ sont égales à $-(\varepsilon_j\sigma_j + \varepsilon_i\sigma_i) \neq 0$ ce qui fait de X un point singulier hyperbolique. Pour $X = UV^T$ (le minimum global) on a $T = I_n$ et les valeurs propres correspondantes sont $-\sigma_j - \sigma_i < 0$. Ceci prouve que X est asymptotiquement stable. Lorsque $X = -UV^T$ (le maximum global) on a $T = -I_n$ et ces valeurs propres valent $\sigma_j + \sigma_i > 0$ de sorte que X est asymptotiquement instable. ■

9.9 Exemple : le quotient de Rayleigh généralisé

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Nous avons vu au paragraphe 8.8 que le problème

$$\min_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} x^T A x$$

a pour valeur la plus petite des valeurs propres de A et que ce minimum est réalisé lorsque x est un vecteur propre associé à cette valeur propre. Enfin, nous avons montré que les points singuliers stables du champ de gradient sont précisément ces vecteurs propres.

Dans l'exemple qui suit, nous généralisons ces résultats au problème du calcul des sous-espaces invariants de A (voir le paragraphe 7.1). Un tel sous-espace, que nous choisissons de dimension k , est décrit par une matrice de Stiefel $X \in \mathbb{S}_{n,k}$ dont les colonnes en constituent une base orthonormée. Nous le noterons $\text{Im } X$.

Théorème 9.5 *Notons $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de A . Alors*

$$\max_{X \in \mathbb{S}_{n,k}} \langle AX, X \rangle_F = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

et ce maximum est réalisé lorsque $X = U_k V$ où $U_k \in \mathbb{S}_{n,k}$ a pour colonnes des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et où $V \in \mathbb{O}_k$. De même

$$\min_{X \in \mathbb{S}_{n,k}} \langle AX, X \rangle_F = \lambda_{n-k+1} + \dots + \lambda_n$$

et ce minimum est réalisé pour des matrices $X = U_k V$ où $U_k \in \mathbb{S}_{n,k}$ a pour colonnes des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_{n-k+1}, \dots, \lambda_n$ et où $V \in \mathbb{O}_k$.

Démonstration. Ecrivons $A = UDU^T$ avec $U \in \mathbb{O}_n$ et $D = \text{Diag}(\lambda_i)$. Posons $Y = U^T X$. Il est facile de voir que

$$\max_{X \in \mathbb{S}_{n,k}} \langle AX, X \rangle_F = \max_{Y \in \mathbb{S}_{n,k}} \langle DY, Y \rangle_F$$

et que X est solution du premier problème si et seulement si Y est solution du second. Ceci nous ramène au cas diagonal. Notons que

$$\langle DY, Y \rangle_F = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^k y_{ij}^2.$$

Posons $c_i = \sum_{j=1}^k y_{ij}^2$. Puisque Y est une matrice de Stiefel on a

$$0 \leq c_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n c_i = k.$$

Etudions le problème

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{0 \leq c_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^n c_i = k}} \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i. \end{aligned}$$

Ce max est égal à $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ et il est atteint lorsque

$$c_1 = \dots = c_k = 1 \text{ et } c_{k+1} = \dots = c_n = 0.$$

En effet

$$c_{k+1} + \dots + c_n = (1 - c_1) + \dots + (1 - c_k),$$

et donc

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}c_{k+1} + \dots + \lambda_n c_n &\leq \lambda_k(c_{k+1} + \dots + c_n) \\ &= \lambda_k((1 - c_1) + \dots + (1 - c_k)) \leq \lambda_1(1 - c_1) + \dots + \lambda_k(1 - c_k) \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

avec égalité sous les conditions précitées. Le calcul précédent montre aussi que cette solution est unique lorsque $\lambda_k > \lambda_{k+1}$.

Cette étude prouve que toute solution du problème d'optimisation en Y est du type $Y = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ où $V \in \mathbb{O}_k$ et que la valeur du maximum est $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$. Les solutions

du problème en X sont $X = UY = U \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ et cette matrice est égale à $X = U_k V$ où $U_k \in \mathbb{S}_{n,k}$ est constituée par les k premières colonnes de U .

L'énoncé correspondant au problème de minimisation se prouve de façon identique. ■

Remarque 9.3 Cette démonstration prouve que l'espace $\text{Im } X$ engendré par toute solution X du problème de maximisation est un sous-espace invariant de A engendré par k vecteurs propres indépendants associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Elle prouve aussi que ce sous-espace invariant est unique lorsque $\lambda_k > \lambda_{k+1}$ (mais la matrice X qui le représente ne l'est pas). ■

Notons

$$f : \mathbb{S}_{n,k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(X) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle_F.$$

Dans les lignes qui suivent, nous étudions le champ de gradient ∇f , nous calculons ses points singuliers ainsi que le comportement des trajectoires au voisinage de ces points singuliers.

Théorème 9.6 $\nabla f(X) = (I_n - XX^T)AX$ et $\nabla f(X) = 0$ si et seulement si $\text{Im } X$ est un sous-espace invariant de A .

Démonstration. Tout d'abord, l'espace tangent à la variété de Stiefel est (paragraphe 3.3)

$$T_X \mathbb{S}_{n,k} = \left\{ \dot{X} \in \mathbb{R}^{n \times k} : X^T \dot{X} = C, C^T = -C \right\}$$

et l'espace normal est

$$(T_X \mathbb{S}_{n,k})^\perp = \{ XS \in \mathbb{R}^{n \times k} : S^T = S \}.$$

La projection orthogonale $\Pi_\perp : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow (T_X \mathbb{S}_{n,k})^\perp$ est donnée par

$$\Pi_\perp Z = \frac{1}{2} X(X^T Z + Z^T X).$$

En effet cette matrice est bien du type XS avec S symétrique et

$$\begin{aligned} \left\langle Z - \frac{1}{2} X(X^T Z + Z^T X), XS \right\rangle_F &= \left\langle X^T Z - \frac{1}{2} (X^T Z + Z^T X), S \right\rangle_F \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (X^T Z - Z^T X), S \right\rangle_F = 0 \end{aligned}$$

pour toute matrice S symétrique. On en déduit que la projection orthogonale $\Pi : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow T_X \mathbb{S}_{n,k}$ est donnée par

$$\Pi Z = Z - \frac{1}{2} X(X^T Z + Z^T X).$$

La dérivée de f est égale à

$$Df(X)\dot{X} = \frac{1}{2} \langle A\dot{X}, X \rangle_F + \frac{1}{2} \langle AX, \dot{X} \rangle_F = \langle AX, \dot{X} \rangle_F$$

et le gradient par

$$\nabla f(X) = \Pi(AX) = AX - \frac{1}{2} X(X^T AX + X^T AX) = (I_n - XX^T)AX.$$

Comme $I_n - XX^T$ est la projection orthogonale sur $(\text{Im } X)^\perp$, on a $(I_n - XX^T)AX = 0$ si et seulement si $\text{Im } (AX) \subset \text{Im } X$ c'est à dire si $A(\text{Im } X) \subset \text{Im } X$ c'est à dire lorsque $\text{Im } X$ est un sous-espace invariant de A . ■

Nous allons maintenant calculer les valeurs propres du hessien $\text{Hess } f(X)$ en un point singulier. Pour ce faire nous allons effectuer deux réductions. La première consiste à supposer que A est diagonale et la seconde que $X = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$. Commençons par justifier ces réductions.

Soit $X \in \mathbb{S}_{n,k}$ qui engendre un sous-espace invariant de dimension k de A . Posons $A = UDU^T$ avec $U \in \mathbb{O}_n$ et $D = \text{Diag}(\lambda_i)$. Nous ne faisons pas ici l'hypothèse que les valeurs propres de A sont rangées par ordre décroissant de sorte que nous pouvons supposer que les valeurs propres de $A|_{\text{Im } X}$ sont $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Nous noterons enfin $U = (U_k \ U_{n-k})$ où U_k (resp. U_{n-k}) est la matrice constituée des k premières (resp. des $n - k$ dernières) colonnes de U . On a donc $X = U_k V$ pour une matrice $V \in \mathbb{O}_k$. Notons enfin $f_D : \mathbb{S}_{n,k} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(Y) = \frac{1}{2} \langle DY, Y \rangle_F$, $Z = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ et posons $Y = U^T X$.

On a

$$\nabla f(X) = (I_n - XX^T)AX = U(I_n - YY^T)DY = U \nabla f_D(Y)$$

de sorte que, pour tout $\dot{X} \in T_X \mathbb{S}_{n,k}$,

$$\text{Hess } f(X)(\dot{X}) = U \text{Hess } f_D(Y)(U^T \dot{X}) = U \text{Hess } f_D(Y)U^T(\dot{X}).$$

Ainsi $\text{Hess } f(X)$ et $\text{Hess } f_D(Y)$ sont semblables.

Posons maintenant $Y = ZV$ avec $Z \in \mathbb{S}_{n,k}$. On a

$$\nabla f_D(Y) = (I_n - ZVV^T Z^T)DZV = (I_n - ZZ^T)DZV = \nabla f_D(Z)V$$

de sorte que

$$\text{Hess } f_D(Y) = \text{Hess } f_D(Z)V V^T = \text{Hess } f_D(Z).$$

Lorsque $X = U_k V$, on a $Y = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui justifie les réductions annoncées.

Théorème 9.7 *Soit $X \in \mathbb{S}_{n,k}$ qui engendre un sous-espace invariant de A . Les valeurs propres de $\text{Hess } f(X)$ sont 0 de multiplicité $k(k-1)/2$ et $\lambda_j - \lambda_i$, $i \in I$, $j \in J$, où λ_i , $i \in I$ sont les valeurs propres de $A|_{\text{Im } X}$ et où λ_j , $j \in J$ sont celles de $A|_{(\text{Im } X)^\perp}$.*

Démonstration. On se ramène au cas $A = \text{Diag}(\lambda_i)$, $X = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$, $I = \{1, \dots, k\}$ et $J = \{k+1, \dots, n\}$. Notons aussi $A = \begin{pmatrix} D_k & O \\ 0 & D_{n-k} \end{pmatrix}$ avec $D_k = \text{Diag}(\lambda_i, i \in I)$ et $D_{n-k} = \text{Diag}(\lambda_j, j \in J)$. Nous avons vu que

$$\nabla f(X) = (I_n - XX^T)AX$$

d'où l'on déduit que

$$\text{Hess } f(X)\dot{X} = (I_n - XX^T)A\dot{X} - (\dot{X}X^T + X\dot{X}^T)AX$$

pour tout $\dot{X} \in T_X\mathbb{S}_{n,k}$. Nous avons vu, au paragraphe 3.3, qu'une telle matrice est du type $\dot{X} = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$ avec $R \in \mathbb{R}^{k \times k}$ antisymétrique et $S \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$. Un calcul facile montre qu'alors

$$\text{Hess } f(X) \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{n-k}S - SD_k \end{pmatrix}.$$

Ceci prouve que ses valeurs propres sont 0 de multiplicité $k(k-1)/2$ qui est la dimension de l'espace des matrices $k \times k$ antisymétriques et $\lambda_j - \lambda_i$, $i \in I$, $j \in J$, qui sont les valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ donné par $S \rightarrow D_{n-k}S - SD_k$.

■

10. La méthode de Newton

10.1 L'inverse de Moore-Penrose

Notons $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ un opérateur linéaire et continu entre deux espaces de Hilbert, dont l'image est fermée dans \mathbb{F} . De ce fait on a deux décompositions en somme directe orthogonale:

$$L : \mathbb{E} = \text{Ker } L \oplus (\text{Ker } L)^\perp \rightarrow \text{Im } L \oplus (\text{Im } L)^\perp = \mathbb{F}.$$

Notons $i : (\text{Ker } L)^\perp \rightarrow \mathbb{E}$ l'injection canonique, $\Pi_{(\text{Ker } L)^\perp} : \mathbb{E} \rightarrow (\text{Ker } L)^\perp$ la projection orthogonale de \mathbb{E} sur $(\text{Ker } L)^\perp$ et enfin $\Pi_{\text{Im } L} : \mathbb{F} \rightarrow \text{Im } L$ la projection orthogonale de \mathbb{F} sur $\text{Im } L$. La restriction de L à $(\text{Ker } L)^\perp$ est une bijection entre cet espace et $\text{Im } L$, ce qui fait de

$$\mathcal{L} = \Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp} : (\text{Ker } L)^\perp \rightarrow \text{Im } L$$

une application linéaire, continue et bijective. Son inverse est aussi continue par le théorème de l'inverse continu: \mathcal{L} est donc un isomorphisme.

Définition 10.1 *On appelle inverse généralisé de L ou inverse de Moore-Penrose l'application linéaire et continue suivante:*

$$L^\dagger : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}, \quad L^\dagger = i \circ \left(\Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp} \right)^{-1} \circ \Pi_{\text{Im } L}.$$

Notons que $L^\dagger = L^{-1}$ dès que L est bijectif puisqu'alors $\text{Ker } L = \{0\}$, $(\text{Ker } L)^\perp = \mathbb{E}$ et $\text{Im } L = \mathbb{F}$. Les propriétés essentielles de ce nouvel opérateur sont:

Théorème 10.1 1. $\text{Ker } L^\dagger = (\text{Im } L)^\perp$ et $\text{Im } L^\dagger = (\text{Ker } L)^\perp$,

2. $L^\dagger \circ L = \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}$ et $L \circ L^\dagger = \Pi_{\text{Im } L}$,

3. $L^\dagger \circ L = (L^\dagger \circ L)^*$ et $L \circ L^\dagger = (L \circ L^\dagger)^*$, où N^* désigne l'adjoint de N ,

4. $L \circ L^\dagger \circ L = L^\dagger$ et $L \circ L^\dagger \circ L = L$

5. L^\dagger est le seul opérateur linéaire et continu $M : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ qui vérifie les propriétés suivantes

(a) $M \circ L$ et $L \circ M$ sont auto-adjoints,

$$(b) M \circ L \circ M = M \text{ et } L \circ M \circ L = L,$$

6. Soit $M : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ un opérateur linéaire et continu qui vérifie les deux propriétés suivantes

$$(a) \text{Ker } M = (\text{Im } L)^\perp,$$

$$(b) L \circ M = \Pi_{\text{Im } L},$$

alors, pour tout $y \in \mathbb{F}$

$$\|L^\dagger(y)\| \leq \|M(y)\|.$$

7. Lorsque L est surjectif, $L \circ L^\dagger = id_{\mathbb{F}}$ et $L^\dagger = L^* \circ (L \circ L^*)^{-1}$, où L^* est l'adjoint de L ,

8. Lorsque L est injectif, $L^\dagger \circ L = id_{\mathbb{E}}$ et $L^\dagger = (L^* \circ L)^{-1} \circ L^*$.

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate de la construction de L^\dagger .

Soit $x = \Pi_{\text{Ker } L}x + \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}x$. On a

$$\begin{aligned} L^\dagger \circ L(x) &= L^\dagger \circ L \circ \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}(x) = i \circ \left(\Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp} \right)^{-1} \circ \Pi_{\text{Im } L} \circ L \circ \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}(x) = \\ &= i \circ \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}(x) = \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $L^\dagger \circ L(x) = \Pi_{(\text{Ker } L)^\perp}$. De façon similaire, soit

$$y = \Pi_{\text{Im } L}y + \Pi_{(\text{Im } L)^\perp}y = L(x) + \Pi_{(\text{Im } L)^\perp}y$$

pour un certain $x \in (\text{Ker } L)^\perp$. On a

$$\begin{aligned} L \circ L^\dagger(y) &= L \circ i \circ \left(\Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp} \right)^{-1} \circ \Pi_{\text{Im } L}(L(x)) = \\ &= L \circ i \circ \left(\Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp} \right)^{-1} \circ \Pi_{\text{Im } L} \circ L|_{(\text{Ker } L)^\perp}(x) = L(x) = \Pi_{\text{Im } L}y \end{aligned}$$

et ceci prouve la seconde assertion.

Une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint d'où la troisième assertion.

La quatrième est une conséquence facile de la seconde. Pour la cinquième, on procède de la façon suivante:

$$\begin{aligned} M &= MLM = MLL^\dagger LM = (ML)^* L^\dagger (LM)^* = L^* M^* L^\dagger M^* L^* = \\ &= L^* M^* (L^\dagger LL^\dagger) M^* L^* = L^* M^* L^\dagger L (L^\dagger LL^\dagger) M^* L^* = L^* M^* (L^\dagger L)^* L^\dagger (LL^\dagger)^* M^* L^* = \\ &= (L^* M^* L^*) L^{\dagger*} L^\dagger L^{\dagger*} (L^* M^* L^*) = (L^* L^{\dagger*}) L^\dagger (L^{\dagger*} L^*) = (L^\dagger L) L^\dagger (LL^\dagger) = L^\dagger LL^\dagger = L^\dagger. \end{aligned}$$

La sixième assertion se montre ainsi: considérons $y = u + v \in \text{Im } L \oplus (\text{Im } L)^\perp$. Puisque L^\dagger et M ont même noyau $(\text{Im } L)^\perp$, on a $\|L^\dagger y\| = \|L^\dagger u\|$ et $\|My\| = \|Mu\|$,

il suffit donc de prouver que $\|L^\dagger y\| \leq \|My\|$ pour tout $y \in \text{Im } L$ ou encore que $\|L^\dagger \circ L(x)\| \leq \|M \circ L(x)\|$ pour tout $x \in \mathbb{E}$. Notons que $L(M \circ L(x)) = L(L^\dagger \circ L(x)) = L(x)$ à cause de l'hypothèse faite sur M et de la seconde assertion pour L . Ceci prouve que $M \circ L(x)$ et $L^\dagger \circ L(x)$ sont dans l'image réciproque de $L(x)$ par L . Cette image réciproque est égale à $x + \text{Ker } L$ et puisque $L^\dagger \circ L(x) \in (\text{Ker } L)^\perp$ c'est le point de cette image réciproque qui est à plus courte distance de 0. D'où l'assertion.

Pour prouver la septième assertion on utilise la cinquième en prenant $M = L^* \circ (L \circ L^*)^{-1}$. La vérification des hypothèses est facile. Le fait que $L \circ L^*$ soit inversible lorsque L est surjectif est classique. Injectivité: si $L \circ L^*(y) = 0$ alors $\langle L \circ L^*(y), z \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathbb{F}$ d'où $\langle L^*(y), L^*(z) \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathbb{F}$ ce qui pour $z = y$ donne $L^*(y) = 0$. En faisant le produit scalaire avec un $x \in \mathbb{E}$ quelconque on obtient $0 = \langle L^*(y), x \rangle = \langle y, L(x) \rangle$. Puisque L est surjectif on peut choisir x tel que $y = L(x)$ ce qui donne $y = 0$. Surjectivité: nous allons montrer que si $y \in \mathbb{F}$ est orthogonal à l'image de $L \circ L^*$ alors $y = 0$. Par hypothèse $\langle y, L \circ L^*(z) \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathbb{F}$, c'est à dire $\langle L^*(y), L^*(z) \rangle = 0$ pour tout z et pour $z = y$ on obtient $L^*(y) = 0$. Multiplions scalairement par un $x \in \mathbb{E}$ quelconque: $0 = \langle L^*(y), x \rangle = \langle y, L(x) \rangle$. Puisque L est surjectif on peut choisir x tel que $y = L(x)$ ce qui donne $y = 0$.

La huitième assertion se prouve par des arguments similaires. ■

10.2 Le champ de Newton

Définition 10.2 Soit M une variété riemannienne et soit $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 . Le champ de Newton est défini par

$$\vec{n}_F : M \rightarrow TM, \quad \vec{n}_F(m) = -DF(m)^\dagger F(m).$$

On notera aussi, comme au chapitre précédent

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(m) = \frac{1}{2} \|F(m)\|^2.$$

Remarque 10.1 Nous ne considérerons ici que le cas injectif. On suppose que $\dim M \leq m$ et l'on pose

$$\Omega_F = \{m \in M : DF(m) \text{ est injectif}\}$$

et, pour tout $m \in \Omega_F$,

$$\vec{n}_F(m) = -DF(m)^\dagger F(m) = -(DF(m)^* DF(m))^{-1} DF(m)^* F(m).$$

En particulier, lorsque $\dim M = m$ et que $DF(m)$ est un isomorphisme on a :

$$\vec{n}_F(m) = -DF(m)^{-1} F(m).$$

■

Le comportement de ce champ au voisinage de ses points d'équilibre est donné par :

Théorème 10.2 1. $m \in \Omega_F$ est un point critique de \vec{n}_F si et seulement si $DF(m)^*F(m) = 0$,

2. Lorsque F est de classe C^2 , le linéarisé de $\vec{n}_F(m)$ en un point critique est donné par

$$D\vec{n}_F(m) = -id_{T_m M} - (DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m) = \\ -(DF(m)^*DF(m))^{-1}Hess f(m),$$

3. Les valeurs propres de $D\vec{n}_F(m)$ sont réelles et, lorsque m est un point critique non dégénéré ($Hess f(m) : T_m M \rightarrow T_m M$ est un isomorphisme),

- (a) Si m est un minimum local de f ces valeurs propres sont < 0 et m est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov,
- (b) Si m est un maximum local de f ces valeurs propres sont > 0 et m est asymptotiquement instable au sens de Lyapunov,
- (c) Si m est un point selle de f ces valeurs propres sont $\neq 0$ et m est un point critique hyperbolique de \vec{n}_F .

Remarque 10.2 1. On retrouve pour les champ de Newton les mêmes points critiques que pour le champ de gradient,

2. La définition de $D^2F(m)^*F(m)$ a été donnée en Remarque 9.2,

3. Lorsque $F(m) = 0$, m est un point critique de \vec{n}_F dont le linéarisé est $D\vec{n}_F(m) = -id_{T_m M}$ ce qui fait de m un point critique asymptotiquement stable.

■

Démonstration. On a :

$$D\vec{n}_F(m) = -D((DF(m)^*DF(m))^{-1})DF(m)^*F(m) - \\ (DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m) - (DF(m)^*DF(m))^{-1}DF(m)^*DF(m).$$

Puisque $DF(m)^*F(m) = 0$ on a :

$$D\vec{n}_F(m) = -(DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m) - id_{T_m M} = \\ -(DF(m)^*DF(m))^{-1}Hess f(m).$$

Pour les propriétés des valeurs propres on utilise le fait que les valeurs propres de

$$-(DF(m)^*DF(m))^{-1}Hess f(m)$$

et de

$$-(DF(m)^*DF(m))^{-1/2}Hess f(m)(DF(m)^*DF(m))^{-1/2}$$

sont les mêmes. Comme ce dernier opérateur est symétrique, ses valeurs propres sont réelles. De plus, les signes de ses valeurs propres sont les mêmes que ceux de $-Hess f(m)$: négatifs pour un minimum, positifs pour un maximum, dans tous les cas non nuls par la condition de non dégénérescence. Les propriétés de stabilité viennent alors du Théorème 8.5. ■

Remarque 10.3 Lorsque $m \in \Omega_F$ est un point critique non dégénéré de \vec{n}_F , f est strictement décroissante le long des trajectoires. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{df(m(t))}{dt} &= \left\langle DF(m(t)) \left(\frac{dm(t)}{dt} \right), F(m(t)) \right\rangle = \\ &= - \left\langle DF(m(t)) DF(m(t))^\dagger F(m(t)), F(m(t)) \right\rangle = - \left\| \Pi_{Im DF(m(t))} F(m(t)) \right\|^2 \end{aligned}$$

et cette quantité est strictement négative en dehors des points d'équilibre du champ.

Cette remarque montre que les trajectoires du champ de Newton sont contenues dans des ensembles du type

$$f^{\leq \lambda} = \{p \in M : f(p) \leq \lambda\}.$$

Lorsque f est inf-compacte, c'est à dire lorsque ces ensembles sont compacts quel que soit λ , les trajectoires du champ sont définies pour tout $t \geq 0$ et possèdent des valeurs limites lorsque $t \rightarrow \infty$. Ces valeurs limites sont soit des points critiques de \vec{n}_F , c'est à dire tels que $DF(m)^*F(m) = 0$, soit des points de $M \setminus \Omega_F$. On a donc affaire à une situation plus compliquée que dans le cas du champ de gradient. ■

10.3 Approximation des trajectoires du champ de Newton

L'approximation des trajectoires du champ de Newton utilise des rétractions comme cela a été fait au chapitre précédent (voir la définition 9.5 ainsi que l'exemple 9.5). Cela donne le schéma numérique suivant

$$N_F : \Omega_M \rightarrow M, N_F(m) = \mathcal{R}_m(-\vec{n}_F(m)).$$

Théorème 10.3 Les points fixes de N_F sont les points critiques de \vec{n}_F ($N_F(m) = 0$ si et seulement si $\vec{n}_F = 0$). Lorsque F est de classe C^2 , en un tel point fixe on a

$$DN_F(m) = -(DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m).$$

Démonstration. Une rétraction \mathcal{R} est définie dans un voisinage de M dans TM c'est à dire au voisinage de tous les couples $(m, 0)$, $m \in M$. L'espace tangent en de tels points s'identifie à

$$T_{(m,0)}TM \cong T_mM \times T_mM.$$

Le premier facteur correspond aux vecteurs tangents à M en m et le second aux vecteurs tangents à T_mM en 0. La dérivée de \mathcal{R} en $(m, 0)$ est donnée par

$$D\mathcal{R}(m, 0)(u, v) = \frac{\partial \mathcal{R}(m, 0)}{\partial m}u + \frac{\partial \mathcal{R}(m, 0)}{\partial \dot{m}}v.$$

Comme $\mathcal{R}(m, 0) = m$ pour tout m , la première dérivée partielle est id_{T_mM} . La seconde dérivée partielle est aussi égale à id_{T_mM} par définition d'une rétraction. Ainsi

$$D\mathcal{R}(m, 0)(u, v) = u + v$$

pour tout $m \in M$, u et $v \in T_m M$. Il suffit alors d'utiliser le théorème 10.2 pour conclure :

$$\begin{aligned} DN_F(m)u &= D\mathcal{R}(m, 0)(u, D\vec{n}(m)u) = u + D\vec{n}(m)u = \\ &-(DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m)u. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 10.4 Lorsque $F(m) = 0$ la dérivée précédente est nulle et ceci prouve que m est un point fixe super-attractif de N_F . Dans le cas général, pour que le point fixe m soit attractif, il faut que le rayon spectral de $(DF(m)^*DF(m))^{-1}D^2F(m)^*F(m)$ soit < 1 ce qui est réalisé lorsque $F(m)$ est assez petit. \blacksquare

Considérons l'exemple suivant:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 + a \end{pmatrix}, \quad F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Lorsque $a = 0$, $x = 0$ est un zéro de F et lorsque $a \neq 0$, $F(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'itération de Newton est donnée par

$$N_F(x) = x - \frac{2x^3 + (2a + 1)x}{4x^2 + 1}$$

et la fonction résidu par

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^4 + (2a + 1)x^2 + a^2).$$

De plus $DN_F(0) = -2a$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = 2a + 1$. 0 est un point fixe de N_F , super-attractif si $a = 0$, attractif si $|a| < 1/2$ et dans ce cas 0 est le minimum de f . Lorsque $|a| > 1/2$, 0 est un point fixe répulsif: si $a < -1/2$ c'est un maximum local de f et si $a > 1/2$ c'est le minimum de f . Cet exemple montre bien qu'un point fixe de N_F correspondant au minimum global de f peut être répulsif.

Noter que, dans cet exemple, on a $(DF(0)^*DF(0))^{-1}D^2F(0)^*F(0) = 2a$. Le rayon spectral de cet opérateur (réduit ici à un scalaire) est < 1 lorsque précisément $|a| < 1/2$.

11. Champ de gradient et champ de Newton sur des structures quotient.

11.1 Introduction

L'exemple du quotient de Rayleigh généralisé étudié au paragraphe 9.9

$$\min_{X \in \mathbb{S}_{n,k}} \langle AX, X \rangle_F$$

attire deux remarques; la première sur le mauvais choix des variables : ce problème caractérise un sous-espace invariant de A mais on a pris pour variable une base orthonormée d'un tel sous-espace. Seconde remarque : il faut bien associer à un tel sous-espace une structure de données avec laquelle on puisse calculer; on a fait ici le choix d'une base orthonormée c'est à dire d'une matrice de Stiefel.

Remarquons que

$$\langle AX, X \rangle_F = \langle AXU, XU \rangle_F$$

pour toute matrice orthogonale $U \in \mathbb{O}_k$. Cette identité montre que

$$f(X) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle_F$$

est constante sur les classes d'équivalence de $\mathbb{S}_{n,k}$ pour la relation $X \equiv Y$ si et seulement si $Y = XU$ pour un $U \in \mathbb{O}_k$. On peut donc définir une application sur le quotient de $\mathbb{S}_{n,k}$ pour cette relation (c'est la grassmannienne $\mathbb{G}_{n,k}$, voir le paragraphe 4.3.4) par

$$g : \mathbb{G}_{n,k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \langle AX, X \rangle_F$$

où X est une matrice de Stiefel telle que $\text{Im } X = \mathcal{X}$.

La question que l'on se pose alors est celle du rapport entre le champ de gradient sur $\mathbb{S}_{n,k}$ associé à f et le champ de gradient sur $\mathbb{G}_{n,k}$ associé à g .

Plus généralement nous allons considérer des problèmes posés sur l'espace des orbites d'un groupe de Lie opérant sur une variété différentiable. Commençons par introduire cette structure.

11.2 Groupes de Lie, espaces d'orbites

Définition 11.1 *Un groupe de Lie (de classe C^k) est un groupe G équipé d'une structure de variété différentiable (de classe C^k) telle que l'application*

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \rightarrow gh^{-1}$$

soit différentiable (de classe C^k).

Exemple 11.1 *Le groupe linéaire \mathbb{GL}_n , le groupe orthogonal \mathbb{O}_n , le groupe spécial orthogonal \mathbb{SO}_n sont des groupes de Lie. Nous rencontrerons aussi $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(]0, \infty[, \times)$ et $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$. ■*

Dans un groupe de Lie G , les applications $\gamma(g) : G \rightarrow G$, $\gamma(g)h = gh$, $\delta(g) : G \rightarrow G$, $\delta(g)h = hg$ et $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$ sont des difféomorphismes.

Définition 11.2 *Soit G un groupe de Lie et soit M une variété différentiable (tous deux de même classe C^k). On dit que G opère différentiablement à gauche sur M si l'on s'est donné une application différentiable de classe C^k*

$$(g, x) \in G \times M \rightarrow gx \in M$$

qui vérifie les axiomes suivants :

1. $g(hx) = (gh)x$ pour tout $x \in M$ et $g, h \in G$,
2. $ex = x$ où e est l'unité du groupe.

Dans ce cas, la relation "il existe $g \in G$ tel que $y = gx$ " est une relation d'équivalence sur M dont les classes sont les ensembles Gx , $x \in M$ (orbite de x). On note M/G l'espace quotient correspondant (espace des orbites) et

$$\pi : M \rightarrow M/G, \quad \pi(x) = Gx$$

la surjection canonique.

Une première question qui se pose est de savoir sous quelle condition on peut définir sur M/G une structure de variété différentiable. La réponse est la suivante :

Définition 11.3 *Soit G un groupe de Lie qui opère différentiablement sur la variété M . On dit que G opère librement si, pour tout $x \in M$ et $g \in G$, $gx = x$ implique $g = e$. On dit que G opère proprement si pour tout couple de parties compactes K et L de M l'ensemble*

$$\{g \in G : (gK) \cap L \neq \emptyset\}$$

est compact.

Théorème 11.1 *Soit G un groupe de Lie qui opère différentialement sur une variété M (tous deux de même classe C^k). Il existe sur l'espace des orbites M/G une structure de variété différentiable de classe C^k pour laquelle l'application canonique $\pi : M \rightarrow M/G$ soit une submersion si et seulement si G opère librement et proprement sur M . Dans ce cas, une application $F : M/G \rightarrow N$ (dans une variété différentiable N de classe C^k) est de classe C^r , $r \leq k$, si et seulement si $F \circ \pi : M \rightarrow N$ est elle-même de classe C^r . La structure de variété sur M/G répondant à la question est unique.*

Pour une démonstration de ce résultat on pourra consulter Dieudonné [9] Chapitres XII et XVI ou Gallot-Hulin-Lafontaine Chapter I. Voici quelques exemples de telles situations parmi ceux que nous avons déjà rencontrés.

- Exemple 11.2**
1. $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $G =]0, \infty[$, \times . M/G s'identifie à la sphère \mathbb{S}^{n-1} ,
 2. $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, \times . M/G s'identifie à l'espace projectif réel \mathbb{P}_{n-1} ,
 3. $M = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ et $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, \times . M/G s'identifie à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$,
 4. $M = \mathbb{S}^{n-1}$ et $G = \{+1, -1\}$. M/G s'identifie aussi à l'espace projectif réel \mathbb{P}_{n-1} ,
 5. $M = \mathbb{S}_{n,k}$ et $G = \mathbb{O}_k$. M/G est la grassmannienne $\mathbb{G}_{n,k}$,
 6. $M = \mathbb{GL}_n$ et $G = \mathbb{R}_n$ (matrices triangulaires supérieures et inversibles) ou bien $M = \mathbb{O}_n$ et $G = \mathbb{T}_n = \mathbb{R}_n \cap \mathbb{O}_n$. On obtient la variété des drapeaux \mathbb{F}_n .

■

Puisque nous avons en tête une histoire de gradients, nous devons définir sur l'espace d'orbites M/G une structure riemannienne.

Définition 11.4 *Soit $p : M \rightarrow N$ une submersion entre la variété riemannienne M et la variété différentiable N . L'espace horizontal en $x \in M$ est l'espace*

$$H_x = (\text{Ker } Dp(x))^\perp \subset T_x M.$$

Lorsque N est aussi une variété riemannienne, on dit que p est une submersion riemannienne lorsque pour tout $x \in M$

$$Dp(x) : H_x \rightarrow T_{p(x)} N$$

est une isométrie c'est à dire lorsque

$$\langle Dp(x)u, Dp(x)v \rangle_{T_{p(x)} N} = \langle u, v \rangle_{T_x M}$$

pour tout $u, v \in H_x$.

Il n'est pas trop difficile de voir, lorsque $p : M \rightarrow N$ est une submersion, que $T_{p(x)}N$ est isomorphe à tout supplémentaire algébrique de $\text{Ker } Dp(x)$ dans T_xM . Comme T_xM est équipé d'un produit scalaire on a ici un choix canonique : l'espace horizontal H_x . La définition précédente exprime le fait que la restriction $p|_{H_x}$ de p à cet espace n'est pas seulement un isomorphisme d'espaces vectoriels mais aussi une isométrie. Cette remarque donne un moyen de définir une variété riemannienne quotient.

Définition 11.5 *Soient M et N deux variétés riemanniennes. Une application $\phi : M \rightarrow N$ est une isométrie si c'est un difféomorphisme de M sur N et si*

$$\langle D\phi(x)u, D\phi(x)v \rangle_{T_{\phi(x)}N} = \langle u, v \rangle_{T_xM}$$

pour tout $x \in M$ et $u, v \in T_xM$.

Théorème 11.2 *Soit M une variété riemannienne et soit G un groupe de Lie d'isométries de M qui opère différentialement, librement et proprement sur M . Il existe une et une seule structure riemannienne sur l'espace des orbites M/G pour laquelle la surjection canonique $\pi : M \rightarrow M/G$ soit une submersion riemannienne.*

Remarque 11.1 1. *Cette structure est définie par le produit scalaire*

$$\langle r, s \rangle_{T_{\pi(x)}M/G} = \langle u, v \rangle_{T_xM}$$

pour tout $x \in M$, $r, s \in T_{\pi(x)}M/G$ et où $u, v \in T_xM$ sont les seuls vecteurs qui vérifient $u, v \in H_x$, $D\pi(x)u = r$ et $D\pi(x)v = s$.

2. *Vérifions que l'expression $\langle u, v \rangle_{T_xM}$ ne dépend pas de x mais uniquement de sa classe $\pi(x)$. En effet, si $x' = g(x)$ avec $g \in G$, puisque $\pi \circ g = \pi$, pour tout $u \in T_xM$ on a $D\pi(x)u = D\pi(x')Dg(x)u$ ce qui prouve que $T_{x'}M = Dg(x)T_xM$ et que $H_{x'} = Dg(x)H_x$. Lorsque $u, v \in H_x$ et $u', v' \in H_{x'}$ avec $D\pi(x)u = D\pi(x')u' = r$ et $D\pi(x)v = D\pi(x')v' = s$, on a $u' = Dg(x)u$ et $v' = Dg(x)v$ et donc*

$$\langle u, v \rangle_{T_xM} = \langle u', v' \rangle_{T_{x'}M}$$

puisque g est une isométrie.

3. *Pour tout $x \in M$ l'orbite Gx est une sous-variété de M et l'on a une décomposition en somme directe orthogonale $T_xM = H_x \oplus T_x(Gx)$.*

■

11.3 Exemples

11.3.1 L'espace projectif réel \mathbb{P}_{n-1} .

C'est l'espace des orbites de la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} par le groupe d'isométries $G = \{\text{id}, -\text{id}\}$. La classe $\pi(x)$ de $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ est $\{x, -x\}$. L'espace tangent à cette orbite en

un point de cette classe est réduit à $\{0\}$ et l'espace horizontal en $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ est

$$H_x = x^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = 0\}.$$

$T_{\pi(x)}\mathbb{P}_{n-1}$ est muni du produit scalaire

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{T_{\pi(x)}\mathbb{P}_{n-1}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

avec $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $u, v \in x^\perp$ tels que $D\pi(x)u = \bar{u}$ et $D\pi(x)v = \bar{v}$.

11.3.2 La grassmannienne $\mathbb{G}_{n,k}$.

C'est l'espace des orbites de l'action du groupe linéaire \mathbb{GL}_k sur l'ensemble $\mathbb{GL}_{n,k}$ des matrices $n \times k$ de rang k :

$$\mathbb{GL}_{n,k} \times \mathbb{GL}_k \rightarrow \mathbb{GL}_{n,k}, (X, G) \rightarrow XG$$

ce qui revient à identifier deux matrices X et X' qui ont même espace image.

On peut aussi considérer $\mathbb{G}_{n,k}$ comme l'espace des orbites de l'action du groupe orthogonal \mathbb{O}_k sur la variété $\mathbb{S}_{n,k}$ des matrices de Stiefel :

$$\mathbb{S}_{n,k} \times \mathbb{O}_k \rightarrow \mathbb{S}_{n,k}, (X, U) \rightarrow XU.$$

$\mathbb{S}_{n,k}$ est muni du produit scalaire de Frobenius. Il fait de \mathbb{O}_k un groupe d'isométries de $\mathbb{S}_{n,k}$.

Pour tout $X \in \mathbb{S}_{n,k}$ les espaces tangents à la variété de Stiefel et à l'orbite de X sont

$$\begin{aligned} T_X\mathbb{S}_{n,k} &= \left\{ \dot{X} : X^T \dot{X} = C, C^T = -C \right\}, \\ T_X(X\mathbb{O}_k) &= \left\{ \dot{X} : \dot{X} = XC, C^T = -C \right\}, \end{aligned}$$

de sorte que l'espace horizontal en X est

$$H_X = \left\{ \dot{X} \in \mathbb{R}^{n \times k} : X^T \dot{X} = 0 \right\}.$$

11.3.3 La variété des drapeaux \mathbb{F}_n .

C'est l'espace des orbites de l'action du groupe \mathbb{T}_n (matrices diagonales et orthogonales) sur le groupe orthogonal \mathbb{O}_n . Ce dernier est muni du produit scalaire de Frobenius ce qui fait de \mathbb{T}_n un groupe d'isométries de \mathbb{O}_n .

Comme dans le cas de l'espace projectif l'orbite d'un élément X est un ensemble fini (\mathbb{T}_n est l'ensemble des matrices diagonales dont les entrées sont ± 1 , il y a 2^n telles matrices). Aussi

$$H_X = T_X\mathbb{O}_n = \left\{ \dot{X} : \dot{X} = XC, C^T = -C \right\}.$$

11.4 Le champ de gradient sur un espace d'orbites

11.4.1 Le champ de gradient.

Considérons deux applications $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : M/G \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\phi = \psi \circ \pi$. Par dérivation on obtient

$$D\phi(x) = D\psi(\pi(x))D\pi(x)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(x), u \rangle_{T_x M} &= D\phi(x)u = D\psi(\pi(x))D\pi(x)u = \langle \nabla\psi(\pi(x)), D\pi(x)u \rangle_{T_{\pi(x)} M/G} = \\ &= \langle D\pi(x)^* \nabla\psi(\pi(x)), u \rangle_{T_x M}. \end{aligned}$$

Notons que $\nabla\phi(x) \in H_x$ parce que $D\phi(x)$ est nul sur $T_x(Gx)$ et que $D\pi(x)^*$ n'est autre que l'application qui à $\bar{u} \in T_{\pi(x)} M/G$ associe l'unique $u \in H_x$ tel que $D\pi(x)u = \bar{u}$. Ceci prouve que

$$D\pi(x)^* \nabla\psi(\pi(x)) = \nabla\phi(x) \in H_x.$$

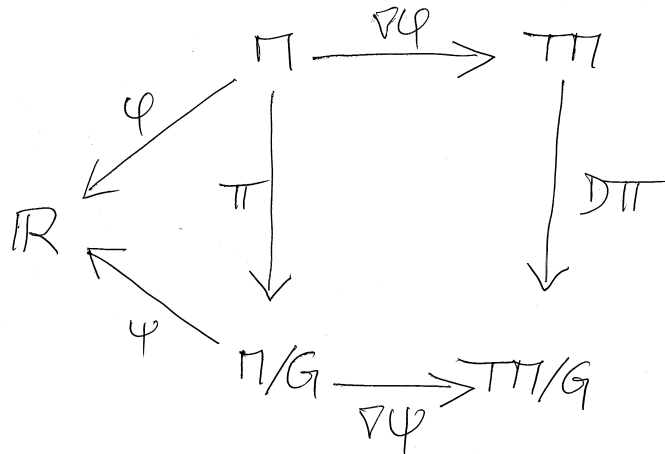


Table 11.1: Gradients de ϕ et ψ

11.4.2 Le flot du champ de gradient.

Notons F^ϕ (resp. F^ψ) le flot du champ de gradient $-\nabla\phi(x)$, $x \in M$ (resp. $-\nabla\psi(\bar{x})$, $\bar{x} \in M/G$). Le rapport entre ces deux flots est donné par l'identité

$$F_t^\psi(\pi(x)) = \pi(F_t^\phi(x)).$$

En effet, puisque $D\pi(x)^*\nabla\psi(\pi(x)) = \nabla\phi(x)$, pour toute trajectoire $x(t)$ du champ en M on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi(x(t)) &= D\pi(x(t))\frac{d}{dt}x(t) = -D\pi(x(t))\nabla\phi(x(t)) = \\ &= -D\pi(x(t))D\pi(x(t))^*\nabla\psi(\pi(x(t))) = -\nabla\psi(\pi(x(t))). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\pi(x(t))$ est une trajectoire du champ sur M/G .

11.4.3 Le hessien.

Soit $x \in M$ un point singulier du champ de gradient : $\nabla\phi(x) = 0$. Il est clair que $\pi(x) \in M/G$ est aussi un point singulier du champ projeté : $\nabla\psi(\pi(x)) = 0$. Les hessiens associés vérifient

$$\text{Hess } \psi(\pi(x)) \circ D\pi(x) = D\pi(x) \circ \text{Hess } \phi(x).$$

En effet, puisque $F_t^\psi(\pi(x)) = \pi(F_t^\phi(x))$, on a

$$D(F_t^\psi(\pi(x))) D\pi(x) = D\pi(x)D(F_t^\phi(x))$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt}D(F_t^\psi(\pi(x)))|_{t=0} D\pi(x) = D\pi(x)\frac{d}{dt}D(F_t^\phi(x))|_{t=0}$$

d'où l'identité annoncée.

11.4.4 Valeurs propres du hessien.

Soit $x \in M$ un point singulier du champ de gradient : $\nabla\phi(x) = 0$. L'égalité $\text{Hess } \psi(\pi(x)) \circ D\pi(x) = D\pi(x) \circ \text{Hess } \phi(x)$ montre que

$$\text{Hess } \phi(x) (\text{Ker } D\pi(x)) \subset \text{Ker } D\pi(x).$$

Comme le hessien est une application linéaire symétrique et que $H_x = \text{Ker } D\pi(x)^\perp$, on a aussi

$$\text{Hess } \phi(x) (H_x) \subset H_x.$$

Il en résulte que

- Les valeurs propres de $\text{Hess } \phi(x)$ sont 0 avec une multiplicité égale à la dimension de $\text{Ker } D\pi(x)$ et celles de la restriction $\text{Hess } \phi(x)|_{H_x} : H_x \rightarrow H_x$.
- Les valeurs propres de $\text{Hess } \psi(x)$ sont celles de la restriction $\text{Hess } \phi(x)|_{H_x} : H_x \rightarrow H_x$.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que $\pi(x)$ soit un point singulier hyperbolique du champ de gradient est que 0 ne soit pas valeur propre de la restriction $\text{Hess } \phi(x)|_{H_x} : H_x \rightarrow H_x$.

11.5 Le champ de Newton sur un espace d'orbites

On se donne maintenant deux applications $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\Psi : M/G \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que $\Phi = \Psi \circ \pi$. Suivant la définition 10.2, le champ de Newton associé est donné par

$$n_\Phi : M \rightarrow TM, \quad n_\Phi(x) = -D\Phi(x)^\dagger \Phi(x)$$

où $D\Phi(x)^\dagger$ est l'inverse généralisé de $D\Phi(x)$. On a :

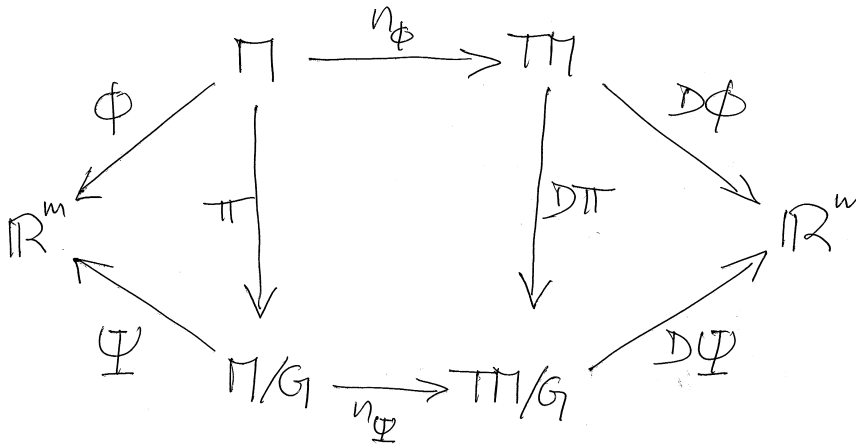


Table 11.2: Les champs n_Φ et n_Ψ

Théorème 11.3 Pour tout $x \in M$ on a :

1. $D\Phi(x) = D\Psi(\pi(x))D\pi(x)$,
2. $\text{Ker } D\Phi(x) = \text{Ker } D\pi(x) \oplus D\pi(x)^*(\text{Ker } D\Psi(\pi(x)))$,
3. $\text{Ker } D\Phi(x)^\perp = D\pi(x)^*(\text{Ker } D\Psi(\pi(x))^\perp)$,
4. $D\pi(x)D\Phi(x)^\dagger = D\Psi(\pi(x))^\dagger$,
5. $D\pi(x)n_\Phi(x) = n_\Psi(\pi(x))$.

Démonstration. La première identité est immédiate. On en déduit que $\text{Im } D\Phi(x) = \text{Im } D\Psi(\pi(x))$ puisque $D\pi(x)$ est surjectif.

Pour prouver la seconde identité on commence par remarquer que

$$\text{Ker } D\Phi(x) \supset \text{Ker } D\pi(x) \oplus D\pi(x)^*\text{Ker } D\Psi(\pi(x))$$

puis on prouve que ces deux sous-espaces ont même dimension. Pour l'inclusion \supset on note que $\text{Ker } D\pi(x) \subset \text{Ker } D\Phi(x)$ par la première identité et que, si $u = D\pi(x)^*(v)$ avec $v \in \text{Ker } D\Psi(\pi(x))$, on a

$$D\Phi(x)u = D\Psi(\pi(x))D\pi(x)D\pi(x)^*(v) = D\Psi(\pi(x))v = 0.$$

Pour compter les dimensions on remarque d'abord que la somme des deux sous-espaces $\text{Ker } D\pi(x)$ et $D\pi(x)^*(\text{Ker } D\Psi(\pi(x)))$ est directe et orthogonale (le second est contenu dans le sous-espace horizontal $H_x = \text{Ker } D\pi(x)^\perp$).

La troisième identité est une conséquence de la seconde.

Passons à la quatrième identité. Soit $v \in \mathbb{R}^m$ et soit $u = D\Phi(x)^\dagger v$. Par définition de l'inverse généralisé on a

$$u \in \text{Ker } D\Phi(x)^\perp \text{ et } D\Phi(x)u = \Pi_{\text{Im } D\Phi(x)} v.$$

Comme $\text{Im } D\Phi(x) = \text{Im } D\Psi(\pi(x))$, par la troisième identité on obtient

$$D\pi(x)u \in D\pi(x)D\pi(x)^*(\text{Ker } D\Psi(\pi(x))^\perp) = \text{Ker } D\Psi(\pi(x))^\perp$$

et

$$D\Psi(\pi(x))D\pi(x)u = \Pi_{\text{Im } D\Phi(x)} v$$

ce qui veut bien dire que $D\pi(x)u = D\Psi(\pi(x))^\dagger v$.

La dernière identité se déduit aisément des précédentes. ■

Bibliographie

- [1] ABRAHAM R., J. E. MARSDEN, T. RATIU, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, 2nd edition, Springer Verlag, 1988.
- [2] BLUM L., F. CUCKER, M. SHUB, S. SMALE, *Complexity and Real Computation*, Springer Verlag, 1997.
- [3] BOLLOBÀS B., *Linear Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [4] BOURBAKI N., *Eléments de mathématique. Topologie Générale*, 4ème éd., Hermann, 1965.
- [5] BOURBAKI N., *Fonctions d'une variable réelle, Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1958.
- [6] BRÉZIS H., *Analyse fonctionnelle.*, Masson, 1987.
- [7] DEDIEU J.-P., *Points Fixes, Zéros et la Méthode de Newton*, Springer Verlag, à paraître. Téléchargement : <http://mip.ups-tlse.fr/personnel/dedieu.html>
- [8] DEMAZURE M., *Catastrophes et Bifurcations*, Ellipses, 1989.
- [9] DIEUDONNÉ, J., *Eléments d'Analyse*, Gauthier-Villars, 1968.
- [10] GALLOT S., D. HULIN, J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, 1990.
- [11] HARTMAN P., *Ordinary Differential Equations*, Second Edition, Birkhäuser, 1982.
- [12] HELMKE U., J. B. MOORE, *Optimization and Dynamical Systems*, Springer Verlag, 1993.
- [13] HIRSCH H., S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [14] JOST J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer-Verlag, 3rd edition.
- [15] O'NEIL B., *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.

- [16] RUDIN W., *Functional Analysis*, Second edition, McGraw Hill Inc., 1991.
- [17] SHUB, M., *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque 56, Société Mathématique de France, 1978.
- [18] STEWART G. W., J.-G. SUN, *Matrix perturbation theory*, Academic Press, 1990.
- [19] UDRISTE, C., *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, Kluwer, 1994.
- [20] WILKINSON J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford (1965).
- [21] YOSIDA K., *Functional Analysis*, fifth edition, Springer-Verlag, 1978.

Index

- \mathcal{R}_k , 25
- \mathbb{F}_n , 34
- GL_k , 32
- $\mathrm{GL}_{n,k}$, 32
- $\mathbb{G}_{n,k}$, 32
- \mathbb{H}_n^+ , 58
- \mathbb{L}_1 , 34
- \mathbb{O}_n , 23
- $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$, 32
- $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, 31
- \mathbb{R}_n , 58
- \mathbb{R}_n^+ , 58
- \mathbb{R}_n , 34
- \mathbb{SO}_n , 23
- Σ_n , 35
- $\mathbb{S}_{n,k}$, 24
- \mathbb{T}_n , 58
- \mathbb{U}_n , 58
- équation locale, 17

- algorithme QR, 65
- application tangente, 39
- approximations successives, 41
- atlas, 29
- atlas équivalents, 30
- atlas maximal, 30

- boîte de flot, 77

- carte, 29
- champ de vecteur, 73
- complet (champ de vecteur), 74
- courbe, 37
- courbe intégrale, 73
- courbe intégrale maximale, 74
- courbes tangentes, 37

- décomposition de Choleski, 59

- décomposition de Schur, 60
- décomposition QR, 58
- dérivée, 39
- dérivée seconde, 92
- dimension, 19
- dimension d'une variété, 30, 38
- drapeau, 34

- espace d'orbites, 114
- espace horizontal, 115
- espace projectif complexe, 32
- espace projectif réel, 31
- espace tangent, 18, 37
- espace tangent (variété immergée), 85
- espace topologique quotient, 30
- exposant caractéristique, 81

- fibré tangent, 37
- flot d'un champ de vecteur, 74
- fonction de classe C^r , 37

- gradient, 15, 90
- grassmannienne, 32
- groupe de Lie, 114

- hessien, 15, 92
- hyperbolique (application linéaire), 42
- hyperbolique (point fixe), 43

- immersion, 84
- inf-compacte (fonction), 94
- inverse de Moore-Penrose, 107
- inverse généralisé, 107
- isométrie, 116

- méthode de la puissance, 53
- matrice de permutation, 33
- Morse (fonction de), 95

- orbite, 114

plongement, 84
point critique, 78
point critique asymptotiquement instable (Liapunov), 79
point critique asymptotiquement stable (Liapunov), 79
point critique hyperbolique, 81
point critique instable (Liapunov), 79
point critique stable (Liapunov), 79
point d'équilibre, 78
point fixe, 41
point fixe attractif, 41
point fixe répulsif, 41
point singulier, 78
polynôme caractéristique, 45
Procrustes (problème de), 99
projection du fibré tangent sur sa base, 37

quotient de Rayleigh generalise, 102

rétraction, 96
rayon spectral, 46, 47

sous-espace contracté, 42
sous-espace dilaté, 42
sous-espace instable, 82
sous-espace stable, 82
sous-variété, 17, 30
spectre, 47
structure riemannienne, 89
submersion riemannienne, 115

topologiquement conjugué, 52
tore, 30

valeur propre, 45
valeur régulière, 45
valeur spectrale, 45
variété différentiable, 30
variété immergée, 84
variété instable, 83
variété instable locale, 83
variété produit, 30
variété riemannienne, 89
variété stable, 83
variété stable locale, 83
vecteur propre, 45
vecteur tangent, 37