4- Logique propositionnelle
- partie I: les tables de vérité -

On appelle **logique propositionnelle** la partie de la logique qui traite des *propositions*. Les propositions sont des affirmations prises "en bloc" qui ne peuvent être que vraies ou fausses. Par exemple: "le ciel est bleu", "l'eau de l'Isère contient du chlore", "les coquelicots sont jaunes", "2+2=4", "2+2=5", "tous les multiples de 4 sont des nombres pairs" sont des propositions. Conformément à ce qui a été dit en introduction à propos de la logique en général, l'un des buts de la logique propositionnelle est d'élaborer un calcul, que nous nommerons: *calcul propositionnel*.
Cela entraîne que les propositions soient traitées comme des *variables*, donc désignées par des *lettres* (p, q, r, ...) et que l'on introduise des *opérations* permettant de combiner les *valeurs* de ces variables. Nous admettons que ces variables sont à valeurs dans l'ensemble {Vrai, Faux}, noté aussi {0, 1}, ou encore {T, ⊥}, etc. (peu importe, la seule chose qui compte est qu'il existe au moins deux notions différentes).

4-1- Méthode des tables de vérité.
C'est un énorme avantage de n'avoir que deux valeurs. Ludwig Wittgenstein (1889-1953) fut sans doute le premier à s'en rendre compte dans son célèbre "Tractatus Logico-philosophicus". Il avait vu en particulier que si n propositions p_1, p_2, ..., p_n entrent dans la définition d'un même "état de choses" (ou, dira-t-on de manière imagée: d'un même "*monde possible*"), celui-ci est complètement caractérisé par une situation des valeurs de vérité de ces propositions parmi 2^n possibles. Ainsi si nous avons 3 propositions: p, q, r, elles déterminent un ensemble de 2x2x2 situations a priori possibles, qui seront notées:
(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) et (0, 0, 0)
Exemple: les propositions "temps chaud", "routes encombrées" et "jour de vacances" déterminent huit situations ou "mondes possibles", ceux pour lesquels:

> le temps est chaud, les routes sont encombrées, c'est un jour de vacances,
> le temps est chaud, les routes sont encombrées, ce n'est pas un jour de vacances,
> le temps est chaud, les routes ne sont pas encombrées, c'est un jour de vacances,
> le temps est chaud, les routes ne sont pas encombrées, ce n'est pas un jour de vacances,
> le temps n'est pas chaud, les routes sont encombrées, c'est un jour de vacances,
> le temps n'est pas chaud, les routes sont encombrées, ce n'est pas un jour de vacances,
> le temps n'est pas chaud, les routes ne sont pas encombrées, c'est un jour de vacances,
> le temps n'est pas chaud, les routes ne sont pas encombrées, ce n'est pas un jour de vacances

Une proposition composée à partir de ces trois propositions atomiques sera donc une manière d'associer "1" à certaines de ces situations et "0" aux autres. Par exemple on peut considérer toutes les situations ou l'une des deux propositions : p ou q est vraie et l'autre, r est fausse. Cela nous donne l'ensemble de situations : (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0). Une autre manière de représenter cet ensemble de situations consiste à reprendre les huit situations données plus haut et à affecter 1 ou 0 selon que la situation particulière appartient à l'ensemble ou ne lui appartient pas. Il s'agit là d'une ***table***, qui représente une certaine **application** de l'ensemble des huit situations en question dans {0, 1}. Une application de l'ensemble des mondes possibles dans {0, 1} est appelée: **fonction de vérité**. La table qui la définit est appelée **table de vérité**.

Etant donné un monde possible ϑ, (assignation de valeurs de vérité à des propositions élémentaires), nous écrirons: $\vartheta \models \phi$ pour dire que ϕ est vraie dans le monde ϑ.

p	q	r	p ou q mais non-r
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Une autre façon de dire cela consiste à supposer qu'on dispose d'un ordre canonique d'énumération des situations: pour connaître une composition possible des propositions atomiques, il suffit alors de se donner un ***vecteur*** de "1" et de "0", c'est-à-dire ce qu'on appelle un *vecteur booléen* . Un tel ordre consiste dans l'ordre lexicographique sur les suites de "1" et de "0" induit par l'ordre "alphabétique" 1 < 0. Les situations étant toujours énumérées dans cet ordre, la composition "p ou q mais non r" se trouve représentée par le vecteur booléen: (0 1 0 1 0 1 0 0). Il est donc facile de prévoir, étant données n propositions élémentaires, combien on peut former de propositions composées distinctes: c'est le nombre d'applications d'un ensemble à 2^n éléments dans un ensemble à 2 éléments. C'est-à-dire le nombre *2 puissance (2 puissance n).* Ainsi il y a $2^{4} =$ 16 compositions distinctes possibles de 2 propositions atomiques. Chacune peut être donnée par sa table de vérité (ou fonction de vérité). On appellera **connecteur** binaire (resp ternaire ... n-aire etc.) un symbole de composition de deux (resp 3, ..., n etc.) propositions élémentaires entre elles, correspondant à l'une des 16 (resp 256, ..., 2^{2**n} etc.) fonctions de vérité possibles.

4-2- Connecteurs usuels

Soit p, q, r des propositions. Parmi les connecteurs, qui sont donc définis comme des opérations internes sur {0,1}, on en distingue quelques-uns parce qu'ils ont une interprétation particulièrement intéressante.

Exemple: définition de "$\wedge$": (*conjonction*)

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Cette table pourrait aussi bien être donnée par la définition suivante de l'opération $\wedge$ sur $\{0, 1\}$:

$$1 \wedge 1 = 1;\ 1 \wedge 0 = 0;\ \ 0 \wedge 1 = 0;\ \ \ 0 \wedge 0 = 0.$$

disjonction :

Sera donnée par:

$$1 \vee 1 = 1 \quad 1 \vee 0 = 1 \quad 0 \vee 1 = 1 \quad 0 \vee 0 = 0$$

D'où la table de vérité:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

négation:

Sera donnée par:

$$\neg\, 1 = 0 \ \text{ et } \neg\, 0 = 1$$

implication :

Sera donnée par:

$$1 \Rightarrow 1 = 1, \quad 1 \Rightarrow 0 = 0, \ \ 0 \Rightarrow 1 = 1, \ \ 0 \Rightarrow 0 = 1$$

D'où la table:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Si nous introduisons le symbole: " $\equiv$" pour signifier : "a même valeur de vérité dans tout monde possible", alors on a:

$$p \Rightarrow q \ \equiv \ \ \neg p \vee q$$

Cette définition de l'implication peut sembler paradoxale, d'abord parce que dans le langage courant, le verbe "impliquer" est utilisé dans un sens transitif et porte la marque d'une action de quelque chose sur quelque chose, alors qu'ici, l'implication n'est qu'un connecteur comme un autre ($\wedge$ ou $\vee$); ensuite à cause de ces deux clauses qui ont fait couler beaucoup d'encre : "$0 \Rightarrow 1 = 1$" et "$0 \Rightarrow 0 = 1$".
Ainsi lorsqu'une proposition est fausse, toute implication qui la possède pour antécédent est vraie! Il ne faut d'ailleurs pas penser que l'étrangeté de l'implication est limitée à ce cas où p est faux. Car dans les deux autres cas, on peut avoir des choses tout aussi surprenantes en apparence. Ainsi une implication entre deux propositions vraies est vrai, quelles que soient ces propositions, c'est-à-dire *indépendamment du contenu* qu'elles peuvent véhiculer. Des auteurs ont pu ainsi s'étonner que: "l'eau bout à 100¡ (sous telle et telle condition etc.)" *implique* "Denis Papin est l'inventeur de la machine à vapeur". Mais c'était se méprendre sur la signification de l'implication définie comme *connecteur* logique. Comme on l'a dit plus haut, il ne faut pas donner ce sens transitif au concept d'implication, ainsi ne doit-on pas confondre: "p **implique** q"(ou "si p alors q")(simple *proposition composée, expression d'un langage-objet*) et "**de** p **on déduit** q" (sorte de *méta-proposition,* en ce qu'elle met en rapport deux propositions différentes). Les linguistes diraient dans une situation semblable que dans un cas, il n'y a qu'un seul acte d'énonciation ("si p alors q"), alors que dans l'autre, il y en a deux: ("p", donc: "q"). D'autre part, les connecteurs logiques n'ont pas de prétention à traduire les significations que nous donnons aux mots qui les désignent dans le langage courant. Enfin, il ne faut pas s'attendre à ce que le contenu de la proposition soit pris en compte, puisque tout l'effort de la logique *formelle* est, comme

son nom l'indique, de s'en abstraire! Ceci vient directement d'une sorte de "postulat de départ" emprunté à Frege, selon lequel une proposition est "*une expression linguistique qui dénote une valeur de vérité*". Cela entraîne comme conséquence que tout ce qui peut appartenir à une proposition, d'étranger à la valeur de vérité, est éliminé. On sait que Frege rejette ces aspects dans *l'intension*. Le langage logico-mathématique ne traite pas des *intensions*, mais seulement des *extensions* c'est-à-dire des propositions vues seulement sous l'angle de l'opposition vrai/faux (ou comme nous le verrons plus loin, des *ensemble*s vus seulement sous l'angle des éléments qui les composent). En bref, il nous suffit, pour justifier cette définition de l'implication, d'observer qu'*elle est le concept d'implication adéquat pour le raisonnement mathématique* (et particulièrement ensembliste).

<u>*équivalence :*</u>

Sera donnée par:

$1 \Leftrightarrow 1 = 1$; $1 \Leftrightarrow 0 = 0$; $0 \Leftrightarrow 1 = 0$; $0 \Leftrightarrow 0 = 1$

On vérifiera que:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Remarques terminologiques :

Dans "$A \Rightarrow B$", on appelle A: condition **suffisante**, en général exprimée en français par la conjonction de subordination **si**, on appelle B: condition **nécessaire**, en général exprimée en français par: **seulement si**, ou: **que si**.

<u>Exemple:</u>

*ma voiture tombe en panne **s**'il pleut*: pluie $\Rightarrow$ panne

*ma voiture ne tombe en panne **que s**'il pleut*: panne $\Rightarrow$ pluie

Une condition A à la fois suffisante (**si**) et nécessaire (**seulement si**) de B est donc une condition **nécessaire et suffisante** de B. Cela s'exprime par: A **si et seulement si** B, qui se note $A \Leftrightarrow B$.

Exercice:

Rechercher tous les connecteurs binaires, tous les connecteurs unaires.

4-3- La notion de loi en logique propositionnelle

4-3-1. Tautologies et contradictions

Un cas particulier de fonction de vérité est donné par *une fonction constante*. C'est soit le cas où, à toute situation de vérité est associé 1, soit le cas où, à toute telle situation est associé 0. Wittgenstein a appelé ***tautologie*** une proposition qui tombe sous le premier cas et ***contradiction*** une proposition qui tombe sous le second. Une tautologie est donc une proposition ϕ telle que pour tout type de monde possible ϑ, on ait:

$$\vartheta \models \phi$$

Nous écrirons:

$\models A$ pour dire que "A est une tautologie".

(Le signe "|=" utilisé dans ce deuxième cas ne saurait être confondu avec le premier: le premier est un lien entre un type de monde possible et une proposition, le second vient simplement en position préfixée devant la proposition pour dire que c'est une tautologie).

Les tautologies sont importantes car elles nous donnent toutes les "lois d'inférence" couramment utilisées en logique et en mathématique.

Théorème 3-1: on a les tautologies suivantes:

$|= p \Rightarrow p$ (loi d'identité pour l'implication)

$|= p \Leftrightarrow p$ (loi d'identité pour l'équivalence)

$|= p \vee \neg p$ (loi du tiers exclu)

$|= \neg (p \wedge \neg p)$ (loi de non-contradiction)

$|= \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$|= \neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (lois de De Morgan)

Noter que les lois de De Morgan peuvent aussi bien s'écrire:

$\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

$\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

D'une façon générale, on montrera que:

Théorème 3-2: $|= (A \Leftrightarrow B)$ si et seulement si $A \equiv B$. (où A et B sont n'importe quelles propositions construites à partir de propositions élémentaires).

Etant donné une tautologie, on peut en construire une infinité à partir d'elle. Pour cela il suffit de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3-3: Soit une proposition composée de variables propositionnelles: a_1, a_2, ... a_n, de connecteurs et de parenthèses. Nous la noterons: $A(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Si $A(a_1, a_2, ... a_n)$ est une tautologie, alors en substituant dans $A(a_1, a_2,... a_n)$ des propositions quelconques A_1, A_2, ... A_n aux symboles a_1, a_2...a_n, on obtient encore une tautologie.

Démonstration:

Soit A* la proposition obtenue après substitution. Appelons b_1, b_2 ... b_m les variables propositionnelles qui occurrent dans A_1, A_2, ...A_n. Toute assignation de valeurs de vérité à b_1, b_2...b_m détermine les valeurs de vérité de: A_1...A_n et donc de A*. Prenons donc le cas où on assigne à a_1, ..., a_n les valeurs de vérité respectives de A_1, ..., A_n, on sait que ces valeurs déterminent entièrement la valeur de vérité de A. En ce cas, elles vont déterminer la valeur de A de sorte qu'elle soit identique à celle de A*. Mais il se trouve que A est une tautologie, donc la valeur de A est 1, et donc aussi celle de A*. Comme ceci est établi indépendamment des valeurs particulières de b_1,b_2...b_m qui entrent dans A*, cela prouve que A* est toujours vrai et est donc bien une tautologie.

Exemple: $((a \wedge b) \Rightarrow c) \vee \neg ((a \wedge b) \Rightarrow c)$ est une tautologie.

Règles d'inférence

Définition: Soit A_1, A_2, ..., A_n des propositions composées de variables propositionnelles, de connecteurs et de parenthèses. Une proposition B sera dite **être une conséquence logique** de A_1, A_2, ... A_n et nous écrirons:

$$\{A_1 , ... , A_n\} |= B$$

si et seulement si: pour toute assignation de valeurs de vérité aux variables propositionnelles occurrant dans A_1, A_2, ...A_n et B, chaque fois que A_1, A_2, ...A_n sont vraies, alors B est aussi vraie.

Attention: voici un nouvel usage du signe "|=". Cette fois, il établit un lien entre un ensemble de propositions et une proposition. Nous allons plus loin établir le rapport entre cet usage et l'usage de "|=" qui est fait pour indiquer la présence d'une tautologie (cf théorème 3-4). Noter aussi que bien évidemment, "|=" n'est pas un connecteur, puisqu'il n'est pas au même niveau que les connecteurs. Ce n'est pas un signe avec lequel on *construit* des propositions, c'est un signe avec lequel on exprime *une relation entre* propositions. (C'est, si on veut, un "méta-signe").

Exemple: règle du détachement, ou du *Modus Ponens*.

$$\{p , (p \Rightarrow q)\} \models q$$

De là on déduit que pour toutes propositions A et B composées de variables propositionnelles, de connecteurs et de parenthèses on a:

$$\{A , (A \Rightarrow B)\} \models B$$

Cette règle d'inférence est la plus fameuse. Frege a démontré qu'elle était suffisante dans le cadre d'un système formel du calcul propositionnel pour démontrer tous les théorèmes. Mais elle n'est pas toujours la plus commode à employer. De nos jours, en informatique, les ***systemes-experts*** ont introduit les règles d'inférence dans de nombreuses applications. Ainsi un ***moteur d'inférences*** est un programme qui applique à une ***base de connaissance*** des ***regles d'inférence*** qui permettent de déduire des "théorèmes". La méthode consistant à utiliser le ***modus ponens*** est assimilable à ce qu'on appelle le ***chaînage avant***: pour établir si un "fait" est vrai, on part des faits déjà admis puis on "avance" en appliquant un nombre indéterminé de fois la règle du détachement. On voit tout de suite l'inconvénient: une telle règle est appliquée à l'aveugle. Si on n'arrive pas à démontrer le fait considéré, ce n'est pas nécessairement parce qu'il est faux ... mais peut-être parce que la chaîne d'inférence à accomplir est plus longue que celle où nous nous sommes arrêtés ou bien parce qu'on est mal parti...etc. D'où l'intérêt d'autres règles.

Autre règle: le *Modus Tollens*.

$$\{(\neg q \Rightarrow \neg p) , p\} \models q$$

d'où bien s•r, pour toutes propositions A et B:

$$\{(\neg B \Rightarrow \neg A) , A\} \models B$$

L'application de cette règle correspond au CHAINAGE ARRIERE. Pour démontrer le fait B, on part de sa négation et on "remonte" jusqu'à ce qu'on ait trouvé la négation d'un fait antérieurement admis.

Reductio ad absurdum

$$\{\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p)\} \models q$$

C'est la règle classiquement employée dans ce qu'on nomme le "raisonnement **par l'absurde**" (improprement, car il n'y a rien d'"absurde" là dedans!)

4-3-2. Tautologie et déduction

On démontre facilement:

Théorème 3-4:

a) $\models (A \Rightarrow B)$ si et seulement si $A \models B$

b) $\{A_1, A_2, ..., A_k\} \models B$ si et seulement si $\{A_1, A_2, ..., A_{k-1}\} \models (A_k \Rightarrow B)$

Ce théorème justifie qu'on emploie le même signe pour indiquer la tautologie et pour symboliser la relation de déduction: dire qu'une proposition est une tautologie, c'est dire qu'elle est vraie sans aucune hypothèse particulière. On peut donc dire que "$\models A$" signifie en fait: "$\emptyset \models A$".

4-4- Retour sur l'implication.

Nous avons dit plus haut que la définition donnée de l'implication était adéquate pour le raisonnement logico-mathématique. C'est ce que nous sommes maintenant en mesure de voir grâce à l'introduction des règles d'inférence. Considérons en effet la règle "universelle" qui est celle du MODUS PONENS. Si nous voulons déduire Q à partir de $(P \Rightarrow Q)$, *elle impose que P soit vrai.* Il n'y a donc aucun danger dans l'acceptation des situations $0 \Rightarrow 1$ et $0 \Rightarrow 0$ dans la valeur de vérité "1" de $p \Rightarrow q$. D'une proposition fausse nous pouvons déduire n'importe quoi, certes. Mais ... une proposition fausse ne

saurait être vraie! Aucune règle d'inférence ne nous permet donc d'utiliser une proposition fausse pour déduire quelque chose. Ici se marque bien la différence entre **déduction** et **implication**, différence cruciale pour toute la théorie logique. (Voir aussi les fameux sophismes de Lewis Carroll, et particulièrement celui intitulé: "Ce que se dirent Achille et la Tortue"...)
Remarque: on se convaincra facilement que tout autre choix de valeurs de vérité pour les deux dernières lignes de la table du "$\Rightarrow$" conduirait soit à une symétrie des deux côtés du "$\Rightarrow$" soit à la possibilité de déduire quelque chose de la fausseté de l'antécédent, ce que nous ne voulons pas. Le propre de l'implication ($p \Rightarrow q$) est de dire que lorsque p est vrai, nécessairement q l'est aussi, mais que **lorsque p est faux, on ne peut *rien* dire**.

Exercices
1- Soit, entre propositions, la relation: A |= B, considérons sur l'ensemble {0, 1} la relation "$\leq$" définie par : $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$. Admettons que les propositions étudiées soient construites à partir d'un stock fini de propositions élémentaires déterminant un certain ensemble W de types de monde possible. Etant donné ϑ un de ces types de mondes, on note w_ϑ l'application qui associe à une proposition ϕ sa valeur de vérité dans ϑ. Vérifier que A |= B si et seulement si $w_\vartheta(A) \leq w_\vartheta(B)$ pour tout type de monde possible ϑ appartenant à W.
Etant données deux propositions élémentaires p et q, dessiner le diagramme de la relation: "|=" sur l'ensemble de toutes les propositions composées à partir de p et de q (et de p et de q seulement).

2- Considérons des variables propositionnelles p_1, p_2, ..., p_n. On appellera *produit élémentaire* une conjonction quelconque de ces variables ou de leurs négations.
(ex: $p_1 \wedge p_1$, $p_1 \wedge p_2$, $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$, $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3$ sont des "produits élémentaires")
On appellera *somme élémentaire* une disjonction quelconque de ces variables ou de leurs négations.
(ex: $p_1 \vee p_2$, $p_1 \vee p_1$, $p_1 \vee \neg p_2$, $p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3$ sont des "sommes élémentaires")

2-1- Démontrer que: une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un produit élémentaire soit une **contradiction** est qu'il contienne au moins une paire de facteurs dont l'un est la négation de l'autre. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme élémentaire soit une **tautologie** est qu'elle contienne au moins une paire de termes dont l'un est la négation de l'autre.

2-2-Etant données deux propositions composées A et B, si $A \equiv B$ et si B est une disjonction de produits élémentaires, alors on dit que: B est une *forme normale disjonctive* de A. Si B est une conjonction de sommes élémentaires, alors on dit que: B est une *forme normale conjonctive* de A.
Trouver une *forme normale disjonctive* de

(a) $\neg p_1 \wedge (p_1 \Rightarrow p_2)$

(b) $\neg (p_1 \vee p_2) \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

(c) $\neg (p_1 \Rightarrow p_2 \wedge p_3) \Leftrightarrow (p_1 \vee p_3)$

(d) $\neg ((p_1 \Rightarrow p_2) \Leftrightarrow p_3) \wedge (p_2 \Leftrightarrow p_3)$

(Remplacer les formules en "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$" en formules en "$\vee$" ,"$\wedge$" et "$\neg$", utiliser les lois de De Morgan et la distributivité)
Trouver *une forme normale conjonctive* de ces mêmes formules.

2-3- Soit p et q deux variables propositionnelles, on appellera *mintermes* les formules: $p\wedge q$, $p\wedge\neg q$, $\neg p\wedge q$, $\neg p\wedge\neg q$ (toutes les conjonctions de p ou de sa négation avec q ou sa négation, en considérant comme équivalentes deux formules qui ne diffèrent que par l'ordre des termes.) On constate que chaque *minterme* est associé à une ligne d'une table de vérité (et à une seule) d'une proposition composée de deux propositions élémentaires.
Utiliser cette constatation pour trouver par un autre moyen que précédemment une forme normale disjonctive des mêmes formules.

On appellera *forme normale disjonctive canonique* (FNDC) d'une proposition composée P la forme normale disjonctive obtenue par cette méthode. Généraliser pour n propositions élémentaires. Faire la même chose en interchangeant conjonction et disjonction. (maxterme au lieu de minterme)

Calculer la forme normale disjonctive canonique de: $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge\neg (\neg q \vee\neg p))$
Calculer la forme normale conjonctive canonique de: $(\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow p)$

3- Dans cet exercice, nous abordons la question de la meilleure expression possible d'une expression logique donnée dans un langage de programmation. Il est d'abord nécessaire d'examiner nos notations, symboles et règles d'écriture pour produire une formule bien formée. En écrivant des propositions composées, nous avons utilisé des parenthèses chaque fois que c'était nécessaire (afin d'éviter les ambiguïtés possibles). Cependant, on peut avoir le souci de réduire le nombre de parenthèses en adoptant certaines conventions. Par exemple, pour éviter d'avoir à écrire:
$(\neg p)$, voire $(\neg (p))$, on va convenir que le signe "$\neg$" *a la priorité* et qu'il s'applique à toute formule bien formée qui le suit immédiatement, de sorte que $\neg p \vee q$ se comprenne : $(\neg p)\vee q$ et non: $\neg(p\vee q)$. On peut bien s•r augmenter le nombre de ces conventions. Supposons par exemple que l'ordre de priorité soit:

$$\neg, \wedge , \vee$$

alors "$\mathbf{p \vee q \wedge r \vee s \wedge t}$" va se comprendre: "$\wedge$" s'applique d'abord aux expressions bien formées qui l'entourent immédiatement, puis à son tour "$\vee$" s'applique à de telles expressions etc.
d'où: $\mathbf{p \vee q \wedge r \vee s \wedge t}$
aura l'interprétation: $\mathbf{(p \vee (q \wedge r)) \vee (s \wedge t)}$

Mais l'évaluation de cette expression exige des retours en arrière, balayages gauche-droite répétés etc. Pour y remédier, on fait appel à une notation dite *préfixée* (à la différence de la précédente, dite "infixée") ou encore *polonaise* (parce qu'elle est due au logicien polonais Jan Lukasiewicz). Dans cette notation, **C** est mis à la place de "$\Rightarrow$", **D** à la place de $\vee$, **K** à la place de $\wedge$, **N** à la place de $\neg$.

ex: notation infixée:	préfixée:
$p \vee q$	**D** P Q
$p \vee (q \vee r)$	**D** P **D** Q R
$p \vee (q \wedge r)$	**D** P **K** Q R
$p \wedge (q \vee \neg r)$	**K** P **D** Q **N** R

Ecrire les formules suivantes en forme préfixée, en admettant l'ordre de priorité:

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

("$\neg$" ayant la plus haute priorité):

$p \Rightarrow q \vee r \vee s$
$q \wedge \neg (r \Leftrightarrow p \vee q)$
$p \wedge \neg r \Rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge q$
$\neg\neg\, p \vee q \wedge r \vee \neg\, q$

Convertir en forme infixée parenthétique les formules suivantes:

C N p **D** q **C** r **N** s
C C p q **C C** q r **C** p r

4- Démontrer les règles d'inférence: (où A, B, C, ... sont des méta-variables désignant des formules quelconques construites à partir des (petites) lettres usuelles, des connecteurs et des parenthèses)

$\{A \Rightarrow B\ ,\ B \Rightarrow C\} \models A \Rightarrow C$
$\{A \Rightarrow B\} \models (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
$\{A\ ,\ B\} \models A \wedge B$
$\{A \wedge B\} \models A$
$\{A \Rightarrow B,\ C \Rightarrow D\} \models (A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge D)$
$\{A\} \models A \vee B$
$\{A \Rightarrow B\ ,\ C \Rightarrow D\} \models (A \vee C) ==> (B \vee D)$

5- Démontrer les règles d'inférence:

$\{A\} \models (B \Rightarrow A)$
$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\ ,\ A \Rightarrow B\} \models (A \Rightarrow C)$
$\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\} \models (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
$\{\neg A\} \models (A \Rightarrow B)$
$\{\neg A \Rightarrow A\} \models A$
$\{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\} \models A$

6- Démontrer que, pour tout ensemble X, Ø est inclus dans X, en utilisant l'une des règles ci-dessus.
Démontrer de façon similaire, que:

- il n'y a qu'un seul ensemble vide
- $Ø \cap A = Ø$
- Ø x A = Ø

Démontrer qu'il existe exactement 1 graphe de fonction bijective sur l'ensemble Ø x Ø .
Si A n'est pas vide, combien de graphes de fonctions injectives, bijectives sur : Ø x A ? A x Ø ?

7- Formuler et démontrer une règle d'inférence par laquelle les hypothèses:
$a > b \Rightarrow a^2 > b^2$, $(c > 0) \wedge (a^2 > b^2) \Rightarrow (ca^2 > cb^2)$ conduisent à la conclusion:
$(c > 0) \wedge (a > b) \Rightarrow ca^2 > cb^2$

8- Analyser logiquement les preuves de :
(a) $\neg (a > a)$ en utilisant le théorème: $(a > b) \Rightarrow \neg (b > a)$
(b) $(a > b) \wedge (\neg (c = 0)) \Rightarrow \neg (ac = bc)$ en utilisant les théorèmes

$(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc$
$(a > b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac < bc$
$\neg (a = b) \Leftrightarrow (a > b) \vee (a < b)$

9- Analyser la validité des arguments suivants:

" Si la paix survient, alors il y aura une crise économique à moins que le pays se dote d'armes nouvelles ou bien exécute un large programme d'investissement intérieur dans les secteurs de l'enseignement, de la santé et de la lutte contre la pauvreté. Il n'est pas possible de se mettre d'accord sur les objectifs que peut se donner un large programme d'investissement intérieur. Donc si la paix survient et qu'il n'y a pas de crise économique le pays doit se doter d'armes nouvelles."

" A moins que nous continuions la politique de soutien des prix, nous perdrons les voix des agriculteurs. Si nous continuons cette politique, la surproduction continuera, sauf si nous contingentons la production. Sans les voix des agriculteurs, nous ne serons pas réélus. Donc si nous sommes réélus et si nous ne contingentons pas la production, il continuera d'y avoir surproduction ."

10- Brown, Jones et Smith sont prévenus de fraude fiscale. Ils prêtent serment de la manière suivante:
BROWN : *Jones est coupable et Smith est innocent.*
JONES : *Si Brown est coupable, alors Smith aussi.*
SMITH : *Je suis innocent mais au moins l'un des deux autres est coupable.*
Soit B , J et S les énoncés: "Brown est innocent" "Jones est innocent" "Smith est innocent"
Exprimer le témoignage de chacun des suspects dans le symbolisme logique. Calculer les valeurs de vérité des trois formules obtenues, puis répondre aux questions suivantes:
(a) Les témoignages sont-ils compatibles?
(b) Quel témoignage d'un suspect découle de celui d'un autre ?
(c) En supposant que tous sont innocents, lequel aurait produit un faux serment ?
(d) En supposant que le témoignage de chacun des suspects est vrai qui est innocent, qui est coupable ?
(e) En supposant que l'innocent a dit la vérité et que le coupable a menti, qui est innocent et qui est coupable ?

11-On introduit le symbole "|":barre de Scheffer ou encore "barre d'incompatibilité" en définissant: p | q par: **p et q sont incompatibles**. A votre avis, quelle est sa table de vérité?
Démontrer que ce symbole suffit à définir tous les autres.

12 - Montrer que tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables à partir des seuls connecteurs: $\Rightarrow$ et $\neg$.

13- Quelles sont les assignations de valeurs de vérité aux lettres propositionnelles p1, ..., p_n qui satisfont:

a) la formule $F = ((p_1 \Rightarrow p_2) \wedge (p_2 \Rightarrow p_3) \wedge ... \wedge (p_{n-1} \Rightarrow p_n))$?

b) la formule $G = (F \wedge (p_n \Rightarrow p_1))$?

Donner une Forme Normale Disjonctive pour F et pour G.

14- Un coffre-fort est muni de n serrures et peut être ouvert uniquement lorsque ces n serrures sont simultanément ouvertes. Cinq personnes: a, b, c, d, e doivent recevoir des clés correspondant à certaines de ces serrures. Chaque clé peut être disponible en autant d'exemplaires qu'on le souhaite. On demande de choisir pour l'entier n la plus petite valeur possible, et de lui associer une répartition de clés entre les cinq personnes de telle manière que le coffre puisse être ouvert si et seulement si on se trouve dans une au moins des situations suivantes:

- présence simultanée de a et b,
- présence simultanée de a, c et d
- présence simultanée de b, d et e.

15- On rappelle que Z/2Z désigne l'ensemble quotient de Z par la relation d'équivalence:

$a \mathfrak{R} b$ ssi $a - b$ divisible par 2

Sur cet ensemble, on définit deux opérations:

$+$ et $\times$ de sorte que:

– $cl(a) + cl(b) = cl(a + b)$ et

– $cl(a) \times cl(b) = cl(a \times b)$

(où cl(x) désigne: la classe de x dans la relation $\mathfrak{R}$)

Cet ensemble muni de ces deux opérations est un corps commutatif.

En admettant que l'ensemble {V, F} est identifié à l'ensemble Z/2Z,

a) exprimer les connecteurs usuels à l'aide des opérations $+$ et $\times$,

b) exprimer $+$ et $\times$ à l'aide des connecteurs usuels,

c) montrer qu'à toute formule ϕ contenant n lettres propositionnelles $p_1, ..., p_n$, on peut associer un polynôme à n variables $(X_1, ..., X_n)$ sur le corps Z/2Z (c'est-à-dire dont les coefficients sont dans Z/2Z) tel que pour toute assignation de valeurs de vérité aux p_i, la valeur de vérité de ϕ soit obtenue comme la valeur du polynôme en question pour les valeurs des X_i correspondant aux valeurs de vérités des p_i,

d) déduire de ce qui précède une méthode pour déterminer si deux formules sont logiquement équivalentes, ou si une formule est une tautologie.